

### 1.3 Конститутивные уравнения

Уравнения (1.5) – (1.8) представляют собой фундаментальные законы механики, сформулированные для сплошных сред, и справедливы для любых деформируемых тел: твердых, жидких, газообразных, вязкоупругих. Однако в силу своей универсальности они имеют следующие особенности: а) уравнения не отражают термомеханических свойств тел; б) система уравнений является незамкнутой, и поэтому их недостаточно для описания динамики термомеханических процессов.

Следовательно, эти уравнения надо дополнить некоторыми соотношениями, отражающими свойства тел и замыкающими систему уравнений баланса, – материальными или конститутивными уравнениями.

В уравнениях (1.5) – (1.8) присутствуют два внешних параметра:  $\vec{b}$  – массовые силы и  $Q_v$  – объемное тепловыделение на единицу массы; при наличии пары уравнений, которые связывали бы  $T$  и  $\vec{q}$  (тензор напряжений и тепловой поток) с полем скорости  $\vec{v}$  и внутренней энергией  $e$ , система (1.5) – (1.8) была бы замкнутой.

Однако такой подход для практических целей оказывается излишне общим, поскольку нелокальность (чувствительность значений конститутивных функционалов в некоторой точке к величинам их аргументов в соседних точках) ограничивается настолько малой окрестностью, что она вполне может быть учтена через градиенты независимых переменных в рассматриваемой точке.

Это значит, что конститутивные функционалы заменяются функциями, в которых набор аргументов дополнен градиентами независимых переменных.

Кроме того, в этих функциях внутренняя энергия является очень неудобным параметром, поскольку не поддается прямому физическому измерению. Однако существует физическая величина, тесно связанная с внутренней энергией и легко поддающаяся измерению – температура. Следовательно, удобно включить в рассмотрение еще одну переменную – температуру  $\theta$ . Поскольку общее число переменных увеличилось, надо к двум упомянутым выше конститутивным уравнениям добавить третье, связывающее внутреннюю энергию с температурой и со всеми другими аргументами конститутивных функций.

С учетом изложенного эти три конститутивных уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} T &= \hat{T}(\theta, \vec{v}, \text{grad}\theta, \text{grad}\vec{v}), \\ \vec{q} &= \hat{\vec{q}}(\theta, \vec{v}, \text{grad}\theta, \text{grad}\vec{v}), \\ e &= \hat{e}(\theta, \vec{v}, \text{grad}\theta, \text{grad}\vec{v}). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Обратим внимание, что в данных конститутивных функциях неявно присутствует и их зависимость от плотности  $\rho$ .

Если ограничиться рассмотрением класса сред, являющихся жидкостями, и только линейной зависимостью конститутивных функций от градиентов, то из упомянутой выше феноменологической теории конститутивных уравнений однозначно следует, что конститутивные уравнения (1.9) должны иметь следующий вид:

1) для тензора напряжений:

$$T = (-p + \xi \text{tr} D)I + 2\mu D, \quad (1.10)$$

где  $D = \frac{1}{2}(\text{grad} \bar{v} + (\text{grad} \bar{v})^T)$ ,  $I$  – единичный тензор.

2) для теплового потока:

$$\bar{q} = -\lambda \text{grad} \theta, \quad (1.11)$$

что представляет собой закон теплопроводности Фурье.

3) для внутренней энергии:

$$e = \hat{e}(\rho, \theta) \approx \hat{e}(\theta). \quad (1.12)$$

Здесь феноменологические коэффициенты конститутивных уравнений  $p$ ,  $\xi$ ,  $\mu$  и  $\lambda$  зависят от параметров состояния (плотности и температуры) и имеют следующий физический смысл:  $p$  – гидравлическое давление,  $[p] = \text{Па}$ ,  $\xi$  – объемная вязкость (дополнительная вязкость, возникающая в сжимаемых жидкостях и газах; проявляется при распространении ударных волн и приводит к дополнительному затуханию),  $\mu$  – сдвиговая вязкость (внутреннее трение; динамическая вязкость),  $[\xi] = [\mu] = \text{Па} \cdot \text{с}$ ,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $[\lambda] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Уравнение (1.12) чаще всего употребляется в упрощенной форме (последнее выражение в (1.12)), поскольку для большинства жидкостей зависимость внутренней энергии от давления в наиболее актуальном интервале давлений незначительна.

Из условия устойчивости равновесного состояния функция  $p = \hat{p}(\rho, \theta)$  должна быть такой, что  $\frac{\partial \hat{p}(\rho, \theta)}{\partial \rho} > 0$  для любых  $\rho$  и  $\theta$ . Таким образом, зависимость  $\hat{p}(\rho, \theta)$  является обратимой, и можно построить обратную  $\hat{\rho}(p, \theta)$  функцию, т.е.  $\hat{\rho}(p, \theta)$ :

$$\rho = \hat{\rho}(p, \theta). \quad (1.13)$$

С помощью (1.13) можно исключить  $\rho$  из параметров состояния в феноменологических коэффициентах и перейти к определению состояния через  $p$  и  $\theta$ , так что  $p$  становится независимой переменной.

Из требования выполнимости второго начала термодинамики вытекают следующие свойства феноменологических коэффициентов:  $\lambda \geq 0$ ;  $\mu \geq 0$ ;  $\xi \geq 0$ .

Резюмируя, отметим, что соотношения (1.10) – (1.12) – это конститутивные уравнения, определяющие вязкую теплопроводную жидкость.

## § 2. Система дифференциальных уравнений переноса

### 2.1 Система дифференциальных уравнений переноса

Рассмотрим некоторые правила дифференцирования тензорных, векторных и скалярных полей.

Для некоторых скалярного поля  $f$  и тензорного поля  $P$ :

$$\operatorname{div} f = \operatorname{tr}(\operatorname{grad} f), \quad (1.14)$$

$$\operatorname{div}(fP) = f\operatorname{div}P + P\operatorname{grad}f. \quad (1.15)$$

Из (1.15) для скалярного поля  $p$  и единичного тензора  $I \Rightarrow$

$$\operatorname{div}(pI) = \operatorname{grad}p. \quad (1.16)$$

Для тензора  $D = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T)$ :

$$\operatorname{tr}D = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T) = \operatorname{div}\vec{v}, \quad (1.17)$$

$$\operatorname{div}D = \frac{1}{2}\operatorname{div}(\operatorname{grad}\vec{v} + (\operatorname{grad}\vec{v})^T) = \Delta\vec{v} + \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}). \quad (1.18)$$

Также для единичного тензора  $I$  и векторного поля  $\vec{v}$ :

$$\operatorname{div}(I\operatorname{div}\vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}). \quad (1.19)$$

---

Уравнения переноса получаются подстановкой конститутивных уравнений (1.10) – (1.12) в уравнения баланса (1.5), (1.6), (1.8) (уравнение (1.7) выполняется тождественно в силу свойств конститутивного уравнения (1.10)).

Из (1.12)  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \hat{e}(\rho, \theta)}{\partial t} \approx \frac{\partial \hat{e}(\theta)}{\partial t} = \frac{d\hat{e}(\theta)}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \equiv c_v \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (1.20)$$

где  $c_v = \frac{d\hat{e}(\theta)}{d\theta}$  – теплоемкость при постоянном объеме.

Подставляя конститутивные уравнения (1.10) – (1.12) в уравнения баланса (1.5), (1.6), (1.8) и используя (1.14) – (1.20), получаем общую форму уравнений переноса:

1) уравнение переноса массы  $\Rightarrow$  уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad}\rho \cdot \vec{v} + \rho \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad (1.21)$$

2) уравнение переноса импульса  $\Rightarrow$  уравнение движения (уравнение Навье – Стокса в случае несжимаемой жидкости):

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = -\text{grad} p + \text{grad}(\xi \text{div} \vec{v}) + \text{div} \left( \mu \left( \text{grad} \vec{v} + (\text{grad} \vec{v})^T \right) \right) + \rho \vec{b}, \quad (1.22)$$

3) уравнение переноса внутренней энергии  $\Rightarrow$  уравнение теплопереноса:

$$\rho c_v \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{grad} \theta \cdot \vec{v} \right) = \text{div}(\lambda \text{grad} \theta) - p \text{div} \vec{v} + \xi (\text{div} \vec{v})^2 + \mu \text{tr} \left( \text{grad} \vec{v} \left( \text{grad} \vec{v} + (\text{grad} \vec{v})^T \right) \right) + \rho Q_v \quad (1.23)$$

4) эта система замыкается уравнением состояния (1.13):

$$\rho = \hat{\rho}(p, \theta). \quad (1.24)$$

Рассмотрим физический смысл некоторых слагаемых, входящих в уравнения переноса (1.22), (1.23).

В уравнении (1.22):

- левая часть представляет собой силу инерции элемента жидкости, отнесенную к единице объема;
- правая часть представляет собой разные виды внешних сил, также отнесенные к единице объема:
  - первый член в правой части – это сила, обусловленная неоднородностью поля давления;
  - второй член – сила, обусловленная объемной вязкостью при сжатии или расширении среды;
  - третий член – сила, обусловленная сдвиговой вязкостью;
  - четвертый член – это сила внешних полей.

В уравнении (1.23):

- левая часть представляет собой скорость изменения внутренней энергии на единицу объема элемента жидкости;
- правая часть представляет собой разные источники этого изменения:
  - первый член в правой части – это скорость теплоподвода к единице объема жидкого элемента за счет теплового потока, обусловленного неоднородностью температуры;
  - второй член – скорость совершения работы силами давления при сжатии или расширении среды;
  - третий член – скорость совершения работы при сжатии или расширении среды силами, обусловленными объемной вязкостью;
  - четвертый член – скорость совершения работы силами, обусловленными сдвиговой вязкостью;
  - пятый член – это внешний объемный источник тепла.

Также в качестве примера рассмотрим вид уравнения состояния (1.24) для случая идеального газа. Исходя из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$pV = \nu R\theta = \frac{m}{M} R\theta \Rightarrow p = \frac{m}{MV} R\theta = \frac{\rho}{M} R\theta \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{pM}{R\theta} = \hat{\rho}(p, \theta). \quad (1.24')$$

## 2.2 Частные формы уравнений переноса

1) *Уравнения переноса для случая постоянных коэффициентов и пренебрежимо малой диссипации.*

Данная форма уравнений переноса применима при умеренных вариациях температуры, когда коэффициенты переноса изменяются незначительно, а вклад диссипации в тепловые процессы пренебрежимо мал. Этот случай вытекает из системы уравнений (1.21) – (1.23), если положить в них  $\xi, \mu, \lambda = \text{Const}$  и обнулить третий и четвертый члены в правой части (1.23). При этом коэффициенты переноса выносятся из-под дифференциальных операторов, используется соотношение (1.18), а композиция операторов градиента и дивергенции дает оператор Лапласа. В результате получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad} \rho \cdot \vec{v} + \rho \text{div} \vec{v} = 0, \quad (1.25)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = -\text{grad} p + \xi \text{grad}(\text{div} \vec{v}) + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{b}, \quad (1.26)$$

$$\rho c_v \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{grad} \theta \cdot \vec{v} \right) = \lambda \Delta \theta - p \text{div} \vec{v} + \rho Q_v. \quad (1.27)$$

2) *Уравнения переноса для случая несжимаемой жидкости.*

Несжимаемая жидкость по определению – это жидкость, у которой плотность постоянна. Поэтому в уравнении неразрывности обнуляются все члены, содержащие дифференцирование плотности, и оно сводится к равенству нулю дивергенции от скорости. В результате система (1.25) – (1.27) трансформируется в следующую:

$$\text{div} \vec{v} = 0, \quad (1.28)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = -\text{grad} p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{b}, \quad (1.29)$$

$$\rho c_v \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{grad} \theta \cdot \vec{v} \right) = \lambda \Delta \theta + \rho Q_v. \quad (1.30)$$

Уравнение переноса импульса вида (1.29) называется уравнением Навье – Стокса.

3) *Уравнения переноса для идеального газа.*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad} \rho \cdot \vec{v} + \rho \text{div} \vec{v} = 0, \quad (1.31)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = -\text{grad} p + \rho \vec{b}, \quad (1.32)$$

$$\rho c_v \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{grad} \theta \cdot \vec{v} \right) = -p \text{div} \vec{v} + \rho Q_v. \quad (1.33)$$

$$\rho = \hat{\rho}(p, \theta). \quad (1.34)$$

Любой из представленных выше вариантов систем уравнений переноса является замкнутой системой дифференциальных уравнений в частных производных и при задании начальных и краевых условий позволяет прогнозировать эволюцию изучаемой системы.