

## Лекция 3

### 2.3 Краевые условия

1) *Гидродинамические краевые условия.*

Для уравнения Навье – Стокса могут задаваться как динамические (для поля скорости), так и кинематические (для тензора напряжений) краевые условия.

а) На границе раздела вязкой жидкости с твердой поверхностью  $S$ , которая движется со скоростью  $\vec{v}_w$ , для жидкости принимаются условия прилипания:

$$\vec{v}|_S = \vec{v}_w; \text{ при } \vec{v}_w = 0 \text{ (неподвижная стенка) } \vec{v}|_S = 0. \quad (1.35)$$

б) Для свободной границы (жидкость граничит с газом с нулевой вязкостью) задаются краевые условия для тензора напряжений:

$$T|_S \vec{n}_S = -p_0 \vec{n}_S, \quad (1.36)$$

где  $\vec{n}_S$  – единичная нормаль к граничной поверхности, направленная в сторону, противоположную от поверхности жидкости.

в) Для идеального газа используются условия непроницаемости (непротекания), требующие равенства нулю нормальной к поверхности компоненты скорости:

$$\vec{v}|_S \vec{n}_S = 0. \quad (1.37)$$

2) *Термические краевые условия.*

На граничной поверхности задаются:

а) температура (граничные условия 1-го рода):

$$\theta|_S = \theta_w, \quad (1.38)$$

б) тепловой поток (граничные условия 2-го рода):

$$-\lambda \text{grad} \theta|_S \cdot \vec{n}_S = q_w, \quad (1.39)$$

в) тепловой поток, определяемый теплообменом между жидкостью и окружающей средой (граничные условия 3-го рода) по закону Ньютона:

$$-\lambda \text{grad} \theta|_S \cdot \vec{n}_S = \alpha (\theta|_S - \theta_0) \quad (1.40)$$

или по закону лучистого теплообмена:

$$-\lambda \text{grad} \theta|_S \cdot \vec{n}_S = \sigma \varepsilon \left( (\theta|_S)^4 - \theta_0^4 \right), \quad (1.41)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана,  $\varepsilon$  – степень черноты поверхности,  $\alpha$  – коэффициент теплообмена жидкости с окружающей средой.

### 2.4 Уравнения переноса в координатной форме

Представим наиболее широко употребляемый вариант системы уравнений переноса для несжимаемой жидкости с постоянными коэффициентами (1.28) – (1.30) в координатной форме.

1) В декартовой системе координат  $(x, y, z)$  с координатными ортами  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  дифференциальные операторы представляются как:

$$\begin{aligned}\text{grad} &= \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \\ \text{div} &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (1.42)$$

Поэтому для несжимаемой жидкости уравнение Навье – Стокса (1.29) для трех компонент поля скорости  $v_x, v_y, v_z$  сводится к следующим трем уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + b_x \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) + b_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + b_z\end{aligned}\quad (1.43)$$

где  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  – кинематический коэффициент вязкости,  $[\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ .

Уравнение неразрывности (1.28) в декартовой системе координат принимает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.44)$$

Уравнение теплопереноса (1.30) (с помощью (1.43) и (1.44)) записывается в виде:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \frac{Q_v}{c}, \quad (1.45)$$

где величина  $a = \frac{\lambda}{\rho c}$  – коэффициент температуропроводности,  $[a] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ .

Компоненты тензора напряжений (1.10) в этом случае имеют вид:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right); \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.46)$$

Из (1.45)  $\Rightarrow$  компоненты тензора напряжений  $T_{xx}$  и  $T_{xy}$ , например, имеют соответственно вид:

$$T_{xy} = T_{i=1, j=1} = -p\delta_{11} + \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) = [\delta_{11} = 1] =$$

$$= -p + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (1.46')$$

$$T_{xy} = T_{i=1, j=2} = -p\delta_{12} + \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = [\delta_{12} = 0] =$$

$$= \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right). \quad (1.46'')$$

2) В цилиндрической системе координат  $(r, z, \varphi)$  учтем, что дифференциальные операторы относительно произвольного скалярного поля  $f$  имеют вид:

$$\vec{v}\nabla f = v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} - v_z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (1.47)$$

Из (1.47)  $\Rightarrow$  уравнение Навье – Стокса (1.29) для трех компонент поля скорости  $v_r, v_\varphi, v_z$  сводится к трем уравнениям:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)v_r - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) + b_r$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left( \Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) + b_\varphi. \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + b_z$$

Уравнение неразрывности (1.28) и уравнение теплопереноса (1.30) соответственно принимают вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\theta = a\Delta\theta + \frac{Q_v}{c}. \quad (1.50)$$

Компоненты тензора напряжений относительно цилиндрической системы координат с учетом свойств  $\delta$ -символа Кронекера записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
T_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad T_{\varphi\varphi} = -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right); \quad T_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}; \\
T_{r\varphi} &= T_{\varphi r} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right); \quad T_{zr} = T_{rz} = \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right); \\
T_{z\varphi} &= T_{\varphi z} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)
\end{aligned} \quad . \quad (1.51)$$