Лекция 4

§ 3. Элементы теории размерности

3.1 П-теорема

Понятие размерности физической величины тесно связано с процессом измерения, в котором физическую величину сравнивают с некоторым ее эталоном (единица измерения). Численное значение отношения измеряемой величины к величине ее эталона вместе с указанием названия эталона − размерность этой величины. В такой записи название единицы измерения можно понимать как некий алгебраический множитель иной природы, нежели числовая, и обращаться с размерными величинами по правилам алгебры с учетом этого обстоятельства.

Известно, что в системе измерения физических величин выделяется некоторое количество основных (независимых) единиц измерения, а все остальные выражаются через них. Это будут составные единицы измерения. В то же время наличие таких связей между размерностями означает, что некоторые комбинации размерных величин могут оказаться безразмерными.

Для задач термомеханики достаточно четырех основных размерностей: длины L, времени t, массы m и температуры T. Все остальные размерности выражаются через них.

Очевидно, что любая физически обоснованная зависимость размерных величин должна быть такой, чтобы ее вид не зависел от выбора системы единиц измерения. На этом принципе основана теория размерности, в которой получена П-теорема, устанавливающая условия выполнения этого принципа.

П-теорема:

связь между $(n+1)$ размерными величинами $a, a_1, ..., a_n$, независимая от выбора системы единиц измерения из k простых единиц, принимает вид соотношения между $(n+1-k)$ величинами $\Pi, \Pi_1, ..., \Pi_{n-k}$, представляющими собой безразмерные комплексы из $(n+1)$ размерных величин.

Т.е. функция связи n независимых размерных величин $a_1, a_2, ..., a_n$ с размерной величиной a вида:

$$a = f\left(\underbrace{a_1, a_2, a_k, a_{k+1}, ..., a_n}_{n}\right) \tag{1.52}$$

может быть представлена как связь безразмерной величины Π с $(n-k)$ безразмерными комплексами $\Pi, \Pi_1, ..., \Pi_{n-k}$ вида:

$$\Pi = f\left(\underbrace{1, 1, ..., 1,}_{k} \underbrace{\Pi_1, ..., \Pi_{n-k}}_{n-k}\right). \tag{1.53}$$

Из этой теоремы также следует, что представление физических зависимостей через безразмерные параметры позволяет сократить общее число параметров, определяющих проблему, вследствие чего упрощается исследование задачи.

При таком представлении: а) выбирают характерные значения для всех переменных (константы обезразмеривания) и вводят безразмерные переменные как отношение их размерных величин к характерным значениям; б) размерные константы задачи и константы обезразмеривания образуют некоторые безразмерные комплексы (критерии), число которых значительно меньше числа размерных констант.

Таким образом, одному набору фиксированных значений критериев соответствует обширное множество наборов размерных констант, которым отвечают подобные режимы.

Таким образом, обезразмеривание имеет следующие преимущества:

1) сокращение числа независимых параметров;

2) один решенный безразмерный вариант соответствует обширному классу размерных задач;

3) все параметры имеют порядок, близкий к единице, что позволяет эффективнее использовать технологические ресурсы вычислительных средств.

Пример:

Пусть в некоторый объем V с характерным поперечным размером L, ограниченный от окружения тонкой стенкой, втекает жидкость с объемным расходом J и начальной температурой θ_0 (рис. 1.1). Протекая через объем, жидкость через стенку площадью S обменивается теплом с окружающей средой, имеющей температуру θ_m и коэффициент теплоотдачи α. Свойства жидкости: μ – вязкость, ρ – плотность, c – теплоемкость, λ – теплопроводность.

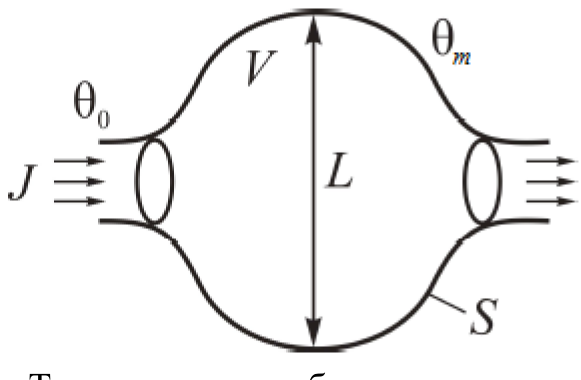

Рис. 1.1 − Течение и теплообмен в некотором объеме

Как видим, задача определяется не менее чем 10 размерными параметрами.

Система уравнений (1.28) – (1.30) и краевые условия (1.40) в данном случае принимают вид:

$$\text{уравнение Навье − Стокса} \Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\vec{v} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \nu\Delta\vec{v}, \qquad (1.54)$$

$$\text{уравнение теплопереноса} \Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathrm{grad}\theta \cdot \vec{v} = \frac{\lambda}{\rho c}\Delta\theta, \qquad (1.55)$$

$$\text{уравнение неразрывности} \Rightarrow \nabla\vec{v} = 0, \qquad (1.56)$$

$$\text{краевые условия} \Rightarrow -\lambda \left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_S = \alpha\left(\left.\theta\right|_S - \theta_m\right). \qquad (1.57)$$

3.2 Безразмерная форма уравнений переноса

Для всех величин выбираются характерные значения:

- $U = \dfrac{Q}{L^2}$ – характерная скорость;
- $\tau_c = \dfrac{L^2}{\nu}$ – кинематическое характерное время;
- $\tau_h = \dfrac{L}{U}$ – гидродинамическое характерное время;
- $\tau_t = \dfrac{L^2}{a}$ – термическое характерное время;
- $p = \rho U^2$ – характерное давление;
- $\Delta\theta = \theta_m - \theta_0$ – характерная температура.

1) *Обезразмеривание через кинематическое характерное время.* Безразмерные переменные и дифференциальные операторы отмечены тильдой.

Безразмерные переменные: $\tilde{\vec{v}} = \dfrac{\vec{v}}{U}$ – скорость, $\tilde{\vec{x}} = \dfrac{\vec{x}}{L}$ – координата, $\tilde{t} = \dfrac{t}{\tau_c}$ – время, $\theta = \dfrac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0}$ – температура, $\tilde{p} = \dfrac{p}{\rho U^2}$ – давление.

Безразмерные дифференциальные операторы: $\widetilde{\mathrm{div}} = L\mathrm{div}$ – дивергенция, $\tilde{\Delta} = L^2\Delta$ – оператор Лапласа.

Выразим из этих соотношений размерные переменные через безразмерные $\Rightarrow$ из (1.54) получим:

$$\text{уравнение Навье} - \text{Стокса} \Rightarrow \frac{\partial\tilde{\vec{v}}}{\partial t} + \widetilde{\mathrm{grad}}\tilde{\vec{v}} \cdot \tilde{\vec{v}} = -\widetilde{\mathrm{grad}}\tilde{p} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\tilde{\Delta}\tilde{\vec{v}}, \qquad (1.58)$$

Здесь константы образовали безразмерный комплекс $\mathrm{Re} = \dfrac{UL}{\nu}$, называемый критерием Рейнольдса.

Повторяя эту процедуру для соотношений (1.55) – (1.57), получим:

$$\text{уравнение теплопереноса} \Rightarrow \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t} + \widetilde{\mathrm{grad}}\tilde{\theta} \cdot \tilde{\vec{v}} = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\tilde{\Delta}\tilde{\theta}, \qquad (1.59)$$

$$\text{уравнение неразрывности} \Rightarrow \tilde{\nabla}\tilde{\vec{v}} = 0, \quad (1.60)$$

$$\text{краевые условия} \Rightarrow -\widetilde{\text{grad}}\,\tilde{\theta}\Big|_S \cdot \vec{n} = \text{Bi}\left(\tilde{\theta}\Big|_S - 1\right). \quad (1.61)$$

Здесь также появляются безразмерные комплексы $\text{Pe} = \dfrac{UL}{a}$ − критерий Пекле и $\text{Bi} = \dfrac{\alpha L}{\lambda}$ − критерий Био.

Следовательно, наша задача определяется уже не 10 размерными параметрами, а 3 безразмерными − Re, Pe, Bi.

2) *Обезразмеривание через гидродинамическое характерное время.* Безразмерные переменные и дифференциальные операторы отмечены тильдой.

Безразмерные переменные: $\tilde{\vec{v}} = \dfrac{\vec{v}}{U}$ − скорость, $\tilde{\vec{x}} = \dfrac{\vec{x}}{L}$ − координата, $\tilde{t} = \dfrac{t}{\tau_h}$ − время, $\theta = \dfrac{\theta - \theta_0}{\theta_m - \theta_0}$ − температура, $\tilde{p} = \dfrac{p}{\rho U^2}$ − давление.

Безразмерные дифференциальные операторы: $\widetilde{\text{div}} = L\text{div}$ − дивергенция, $\tilde{\Delta} = L^2\Delta$ − оператор Лапласа.

При данном обезразмеривании уравнения (1.45), (1.46) имеют вид:

$$\text{уравнение Навье − Стокса} \Rightarrow \frac{\partial\tilde{\vec{v}}}{\partial\text{Fo}} + \widetilde{\text{grad}}\,\tilde{\vec{v}} \cdot \tilde{\vec{v}}\text{Pe} = \text{Pr}\,\tilde{\Delta}\tilde{\vec{v}}, \quad (1.62)$$

$$\text{уравнение теплопереноса} \Rightarrow \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\text{Fo}} + \widetilde{\text{grad}}\,\tilde{\theta} \cdot \tilde{\vec{v}}\text{Pe} = \tilde{\Delta}\tilde{\theta}, \quad (1.63)$$

где $\text{Fo} = \dfrac{at}{L^2}$ − число Фурье, имеющее смысл безразмерного времени

При условии $\text{Pr} = 1$ уравнения движения (1.62) и теплопроводности (1.63) становятся тождественными относительно переменных $\tilde{\vec{v}}$ и $\tilde{\theta}$, что означает подобие распределений скоростей и температур.

3.3 Критерии подобия

Рассмотрим ряд критериев (чисел) подобия, использующихся при изучении гидродинамических, тепловых и диффузионных процессов.

1) *Число Рейнольдса.*

$\text{Re} = \dfrac{UL}{\nu}$ − мера отношения сил инерции, действующих в потоке, к силам вязкости.

Плотность в числителе выражения характеризует инерцию частиц, отклонившихся от движения по прямой, а вязкость в знаменателе показывает склонность жидкости препятствовать такому отклонению.

Также число Рейнольдса можно рассматривать как отношение кинетической энергии жидкости к потерям энергии на характерной длине (ввиду внутреннего трения).

Если у потока число Рейнольдса достаточно большое (выше критической величины), то жидкость можно рассматривать как идеальную. В таком случае вязкостью можно пренебречь.

Для каждого вида течения существует критическое число Рейнольдса, которое, как принято считать, определяет переход от ламинарного течения к турбулентному. Критическое значение числа Рейнольдса зависит от конкретного вида течения. Например, для течения (точнее, для стабилизированного изотермического потока) жидкости в прямой круглой трубе с очень гладкими стенками $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 2100$.

2) *Число Пекле.*

$\mathrm{Pe} = \dfrac{Ud}{a}$ − критерий подобия, характеризующий отношение конвективных и кондуктивных составляющих теплообмена.

3) *Число Био.*

$\mathrm{Bi} = \dfrac{\alpha L}{\lambda}$ характеризует соотношение между перепадом температуры в двух точках тела, находящихся на характерном расстоянии L друг от друга, и температурным напором (температура поверхности тела − температура окружающей среды).

Число Био представляет собой отношение термического сопротивления стенки к термическому сопротивлению передачи тепла на поверхности. Для геометрически подобных тел равенство чисел Био определяет подобие распределений температуры (температурных полей).

4) *Число Фурье.*

$\mathrm{Fo} = \dfrac{at}{L^2}$ − один из критериев подобия нестационарных тепловых процессов. Характеризует соотношение между скоростью изменения тепловых условий в окружающей среде и скоростью перестройки поля температуры внутри рассматриваемой системы (тела), который зависит от размеров тела и коэффициента его температуропроводности.

Критерий Фурье вместе с критерием Био являются определяющими при решении задач нестационарной теплопроводности, описываемых уравнением теплопроводности. Определяемым критерием в таких задачах является безразмерная температура $\theta = f\left(\mathrm{Bi}, \mathrm{Fo}, \dfrac{x}{L}\right)$.

5) *Число Прандтля.*

$\mathrm{Pr} = \dfrac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}} = \dfrac{\nu}{a}$ характеризует подобие полей скоростей и температур.

При $\mathrm{Pr}=1$ уравнения движения и теплопроводности становятся тождественными относительно своих переменных, что означает подобие распределений скоростей и температур.

6) *Число Нуссельта.*

$\mathrm{Nu}=\dfrac{\alpha L}{\lambda};\ \dfrac{q_w L}{\lambda\left(\theta_w-\theta_0\right)}$ − один из основных критериев подобия тепловых процессов, характеризующий соотношение между интенсивностью теплообмена за счёт конвекции и интенсивностью теплообмена за счёт теплопроводности (в условиях неподвижной среды).

Число Нуссельта всегда больше или равно 1. То есть тепловой поток за счёт конвекции всегда превышает по своей величине тепловой поток за счёт теплопроводности.

Обычно для ламинарных течений число Нуссельта находится в диапазоне от 1 до 20. Большие числа Нуссельта $\mathrm{Nu}>100$ свидетельствуют о сильном конвективном тепловом потоке, что является характеристикой турбулентных течений.

Для течений жидкости в каналах можно показать, что для установившегося ламинарного течения $\mathrm{Nu}=4{,}36$ (при условии, что тепловой поток в стенку постоянен) и $\mathrm{Nu}=3{,}66$ (при условии, что постоянна температура стенки).

7) *Число Грасгофа.*

$\mathrm{Gr}=\dfrac{\beta g\Delta TL^3}{\nu^2};\ \dfrac{\beta g q_w L^4}{\nu^2\lambda}$ − критерий подобия, определяющий процесс подобия теплообмена при конвекции в поле тяжести и является мерой соотношения архимедовой выталкивающей силы, вызванной неравномерным распределением плотности жидкости, газа в неоднородном поле температур, и сил вязкости.

8) *Число Рэлея.*

$\mathrm{Ra}=\mathrm{Gr}\mathrm{Pr}=\dfrac{\beta g\Delta TL^3}{\nu a};\ \dfrac{\beta g q_w L^4}{\nu\lambda a}$ − критерий подобия, определяющий поведение жидкости под воздействием градиента температуры. Если число Рэлея больше некоторого критического значения, равновесие жидкости становится неустойчивым и возникают конвективные потоки. Критическое значение числа Рэлея является точкой бифуркации для динамики жидкости.

9) *Число Гретца.*

$\mathrm{Gz}=\mathrm{Pe}\dfrac{L}{d}$ − критерий подобия, определяющий соотношение между теплоёмкостью и теплопроводностью жидкости.

10) *Число Стэнтона.*

$\mathrm{St}=\dfrac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}}=\dfrac{\alpha}{c\rho U}$ − критерий подобия, характеризующий отношение эффективной теплоотдачи с поверхности к конвективному теплопереносу. Число Стэнтона является безразмерной формой коэффициента теплоотдачи.

11) *Число Шмидта*.

$\mathrm{Sc} = \dfrac{\nu}{D}$ − число, показывающее соотношение интенсивностей диффузии импульса (то есть вязкость) и диффузии вещества, то есть характеризует относительную роль молекулярных процессов переноса количества движения и переноса массы примеси диффузией. Оно является критерием подобия для течений жидкости, в которых наблюдаются одновременно как переносы вещества (обычно примеси), так и вязкие эффекты.

Является аналогом числа Прандтля для задач диффузии.

12) *Число Льюиса*.

$\mathrm{Le} = \dfrac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}} = \dfrac{a}{D}$ − критерий подобия в молекулярной физике, определяющий соотношение между теплопроводностью и диффузией. Число Льюиса характеризует соотношение между интенсивностями переноса массы компонента диффузией и переноса теплоты теплопроводностью.

При $\mathrm{Le} = 1$ уравнения диффузии и теплопроводности становятся идентичными, и профили концентраций компонентов и температуры оказываются подобными.

13) *Число Лыкова*.

$\mathrm{Lk} = \dfrac{a}{D}$ − критерий подобия в теории сушки, равный отношению диффузии вещества к диффузии теплоты. Является аналогом числа Льюиса.

14) *Число Фруда*.

$\mathrm{Fr} = \dfrac{U^2}{Lg}$ − критерий подобия, показывающий отношение сил инерции к гравитационным силам.

15) *Число Маха*.

$\mathrm{M} = \dfrac{v}{a_s}$ − критерий подобия, представляющий отношение скорости течения в данной точке газового потока к местной скорости распространения звука в движущейся среде.

Важное значение числа Маха объясняется тем, что оно определяет, превышает ли скорость течения газовой среды (или движения в газе тела) скорость звука или нет. Сверхзвуковые и дозвуковые режимы движения имеют принципиальные различия, для авиации это различие выражается в том, что при сверхзвуковых режимах возникают узкие слои быстрого значительного изменения параметров течения (ударные волны), приводящие к росту сопротивления тел при движении, концентрации тепловых потоков у их поверхности и возможности прогорания корпуса тел и т. п.

Численное выражение числа Маха зависит, прежде всего, от высоты полёта (чем больше высота, тем ниже скорость звука и выше число Маха). Число Маха − это истинная скорость в потоке (то есть скорость, с которой воздух обтекает, например, самолёт), делённая на скорость звука в конкретной среде, поэтому зависимость является обратно пропорциональной.