

8.2 Сопротивление трения

Рассмотрим сопротивление, которое испытывает пластина в движущемся потоке. Это сопротивление обусловлено касательными силами вязкого трения, приложенными к поверхности со стороны жидкости. Касательное усилие в нашем случае – это X -компонента поля усилий $\tau(\vec{n}, \vec{x})$ на поверхности, которая, согласно теореме Коши (1.3), определяется как $\tau_x = \vec{\tau} \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_x \cdot T \cdot \vec{n} = [\vec{e}_y \perp \vec{e}_x] = \vec{e}_x \cdot T \cdot \vec{e}_y$, где \vec{e}_x – орт координатной оси x ; $\vec{n} = \vec{e}_y$ – нормаль к поверхности, совпадающая здесь с ортом координатной оси y . Выражение $\vec{e}_x \cdot T \cdot \vec{e}_y$ по определению есть компонента XU тензора напряжений T в декартовой системе координат, которая согласно (1.46') имеет вид:

$$T_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (3.25')$$

В итоге касательное напряжение на поверхности пластины запишется следующим образом: $\tau_x|_{y=0} = T_{xy}|_{y=0} = (3.25') = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} \Rightarrow$ с учетом граничных условий (3.14) \Rightarrow

$$\tau_x|_{y=0} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0}. \quad (3.25'')$$

Из (3.25'') при (3.16) \rightarrow (3.20) с учетом (3.24-2) \Rightarrow

$$\tau_x|_{y=0}(x) = \mu \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} f''(0) = \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \alpha \Rightarrow$$

$$\tau_x|_{y=0}(x) = 0,332 \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}. \quad (3.25)$$

Введем локальный безразмерный коэффициент сопротивления $C'_f(x)$ как отношение касательного напряжения на поверхности пластины к характерному давлению $\frac{\rho u_\infty^2}{2}$:

$$C'_f(x) = \frac{\tau_x|_{y=0}(x)}{\frac{\rho u_\infty^2}{2}}. \quad (3.26')$$

Отметим, что при таком определении коэффициент $C'_f(x)$ действительно является безразмерным, т.к. $[\tau_x] = [p] = \text{Па}$. (3.25) \rightarrow (3.26') \Rightarrow

$$C'_f(x) = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}} \Rightarrow$$

$$C'_f(x) = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}}, \quad (3.26)$$

где Re_x – локальное число Рейнольдса, определяющее критерий, характеризующий правомочность приближения пограничного слоя (см. п. 8.1).

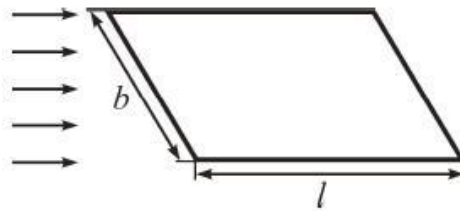


Рис 3.5 – Геометрия задачи для определения силы сопротивления пластины конечных размеров

Сила сопротивления пластины конечных размеров (рис. 3.5) рассчитывается интегрированием касательного напряжения (3.25) по площади пластины:

$$W = b \int_0^l \tau_x|_{y=0}(x) dx = (3.25) = 0,332 \mu b u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Rightarrow$$

$$W = 0,664 b u_\infty \sqrt{\mu \rho l u_\infty}. \quad (3.27')$$

Введем полный безразмерный коэффициент сопротивления C_f как отношение силы сопротивления пластины к характерной силе давления

$$pS = \frac{\rho u_\infty^2}{2} bl:$$

$$C_f = \frac{W}{\frac{\rho u_\infty^2}{2} bl}. \quad (3.27'')$$

При таком определении коэффициент C_f также является безразмерным, т.к.

$$[W] = [pS] = \text{Н}. \quad (3.27') \rightarrow (3.27'') \Rightarrow C_f = \frac{1,328}{\sqrt{\frac{u_\infty l}{\nu}}} \Rightarrow$$

$$C_f = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (3.27)$$

Соотношение (3.27) служит для практических расчетов сопротивления обтекаемых тел в форме прямоугольника.

8.3 Толщина пограничного слоя

Выше дано определение пограничного слоя как области, прилегающей к поверхности обтекаемого тела, в которой происходит основное изменение гидродинамических параметров потока от их значений на поверхности обтекаемого тела до значений на бесконечности. Однако строго определенной границы этого слоя нет, поскольку параметры изменяются асимптотически. Поэтому толщина его определяется условно, по какому-либо искусственно выбранному критерию.

Например, одним из таких критериев может быть такой: границей пограничного слоя толщиной δ для данного значения продольной координаты является точка, в которой значение продольной скорости только на 1% отличается от ее значения на бесконечности, т.е. $u_\infty - u_\delta = 0,01u_\infty$.

Именно такое свойство тонкой зоны течения, прилегающей к поверхности обтекаемого тела, и использовалось при рассмотрении понятия пограничного слоя в п. 7.1. (3.24-1) $\Rightarrow f'(\infty) - f'(5) = 0,01f'(\infty) \Rightarrow$ выполнению данного критерия соответствует значение автомодельной переменной $\eta = 5 \Rightarrow$

(3.16-2) при $y = \delta \Rightarrow \eta = \delta \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = 5 \Rightarrow$ находим выражение для определения

толщины пограничного слоя по данному критерию:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}. \quad (3.28)$$

Более физичным критерием является так называемая толщина вытеснения δ_b . По этому критерию характеристикой толщины пограничного слоя является толщина слоя неподвижной (заторможенной) жидкости, прилегающей к поверхности, обтекаемого потоком с однородной продольной скоростью u_∞ , при которой в слое обеспечивается такой же дефицит расхода, как и в реальном пограничном слое.

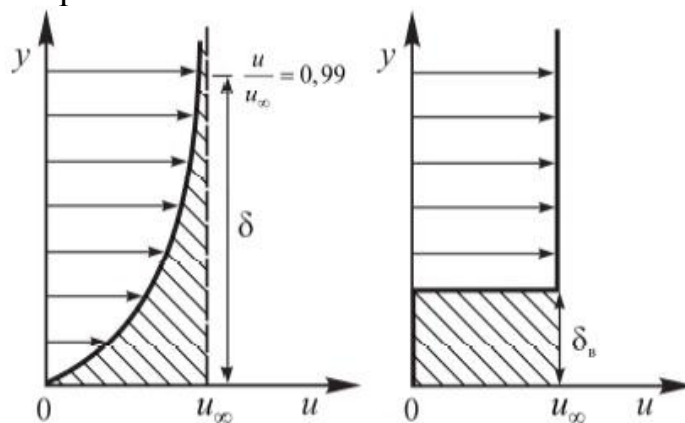


Рис 3.6 – Физический смысл толщины вытеснения

Иными словами, реальный профиль продольной скорости потока заменяется ступенчатым, с неподвижным слоем вблизи поверхности и постоянной скоростью вне этого слоя, как показано на рис. 3.6. Условие равенства дефицита расхода в модельном профиле и в реальном имеет вид:

$$\int_0^{\infty} (u_{\infty} - u(y)) dx = \delta_B u_{\infty}. \quad (3.29)$$

(3.20) \rightarrow (3.29) \Rightarrow с учетом выражения для автомодельной переменной η

$$(3.16-2) \Rightarrow \delta_B = \frac{1}{u_{\infty}} \int_0^{\infty} (u_{\infty} - u(y)) dx = \int_0^{\infty} \left(1 - f' \left(y \sqrt{\frac{u_{\infty}}{vx}} \right) \right) dx = \sqrt{\frac{vx}{u_{\infty}}} \int_0^{\infty} (1 - f'(\xi)) d\xi$$

\Rightarrow (3.24-3) \Rightarrow

$$\delta_B = 1,7208 \sqrt{\frac{vx}{u_{\infty}}}. \quad (3.30)$$

Данная характеристика толщины пограничного слоя удобна тем, что позволяет оценить, насколько сильно обтекаемое тело деформирует внешний поток.

Также в качестве критерия, определяющего толщину пограничного слоя, можно рассмотреть так называемую толщину потери импульса $\delta_{\text{и}}$. Аналогично (3.29) \Rightarrow

$$\int_0^{\infty} u(y)(u_{\infty} - u(y)) dx = \delta_{\text{и}} u_{\infty}^2. \quad (3.31)$$

В результате вычислений из (3.31) получим:

$$\delta_{\text{и}} = 0,664 \sqrt{\frac{vx}{u_{\infty}}}. \quad (3.32)$$

Заметим, что независимо от выбора величины δ_i , определяющей толщину пограничного слоя, профиль скорости в задаче о пограничном слое на плоской пластине будет аффинноподобен, т.е. $\frac{u}{u_{\infty}} = \varphi_i$, где $\varphi_i = \varphi_i \left(\frac{y}{\delta_i} \right)$, а δ_i определяются согласно (3.28), (3.30), (3.32). Таким образом, свойство автомодельности данной задачи эквивалентно свойству подобия.