Лекция 14

### 14.2 Решение задачи конвективного теплообмена при течении жидкости в круглой трубе при постоянном тепловом потоке на стенке

В силу изложенного выше, будем искать решение задачи (5.30), (5.31) в виде суперпозиции функций зависимости температуры от продольной и радиальной координат $\Rightarrow$ с учетом (5.34) $\Rightarrow$ $T(r,z)=T_0+Az+\theta(r)$ $\Rightarrow$ (5.35) $\Rightarrow$

$$T(r,z)=T_0+\frac{2q_w}{\rho c_p \bar{u} R}z+\theta(r). \qquad (5.36)$$

(5.36) $\rightarrow$ (5.30) $\Rightarrow$

$$4\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)=\frac{\lambda R}{q_w}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right). \qquad (5.37)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\tilde{\theta}=\frac{\lambda\theta}{q_w R},\quad \tilde{r}=\frac{r}{R}. \qquad (5.38)$$

(5.38) $\rightarrow$ (5.37) $\Rightarrow$

$$4\left(1-\tilde{r}^2\right)=\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{r}}\right). \qquad (5.39)$$

(5.38) $\rightarrow$ (5.31) $\Rightarrow$ граничные условия:

$$\underbrace{\left.\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{r}}\right|_{\tilde{r}=0}=0}_{1)},\quad \underbrace{\left.\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{r}}\right|_{\tilde{r}=1}=1}_{2)}. \qquad (5.40)$$

$\iint\limits_{\tilde{r}}(5.39)$ $\Rightarrow$

$$\tilde{\theta}=4\left(-\frac{\tilde{r}^4}{16}+\frac{\tilde{r}^2}{4}\right)+C_1\ln\tilde{r}+C_2. \qquad (5.41)$$

(5.41) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\tilde{r}}=-\tilde{r}^3+2\tilde{r}+C_1\frac{1}{\tilde{r}}\ . \qquad (5.41')$$

$\Rightarrow$ для выполнения граничного условия (5.40−1) очевидно необходимо, чтобы:

$$C_1=0. \qquad (5.42)$$

Граничное условие (5.40−2) автоматически следует из $(5.41')$ при $\tilde{r}=1$.

Поэтому для определения константы $C_2$ воспользуемся дополнительным условием, согласно которому средневзвешенное значение от $\tilde{\theta}(\tilde{r})$ должно быть равно нулю. Это требование вытекает из того, что зависимость средневзвешенной температуры от $z$ в решении (5.36) полностью учтена первыми двумя слагаемыми, поэтому средневзвешенное значение последнего слагаемого должно быть равно нулю. В безразмерном виде условие $\bar{\bar{\theta}}(\tilde{r})=0$ имеет вид:

$$\int_0^1 \tilde{\theta}(\tilde{r})\left(1-\tilde{r}^2\right)\tilde{r}\mathrm{d}\tilde{r}=0. \qquad (5.43)$$

(5.41) $\to$ (5.43) с учетом (5.42) $\Rightarrow$

$$C_2=-\frac{7}{24}. \qquad (5.42')$$

(5.42), (5.42′) $\to$ (5.41) $\Rightarrow$

$$\tilde{\theta}=-\frac{\tilde{r}^4}{4}+\tilde{r}^2-\frac{7}{24}. \qquad (5.44)$$

В результате общее решение для эволюции температуры (5.36) в размерном виде будет иметь вид:

$$T(r,z)=\frac{2q_w}{\rho c_p\bar{u}R}z+\frac{q_wR}{\lambda}\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4+\left(\frac{r}{R}\right)^2-\frac{7}{24}\right). \qquad (5.45)$$

Выразим результат в терминах числа Нуссельта при $r=R$ $\Rightarrow$

$$\mathrm{Nu}=\frac{2q_wR}{\lambda\left(T(r,z)-\bar{T}(z)\right)}=(5.45),(5.34),(5,35)=\frac{2q_wR}{\lambda\left(\dfrac{2q_w}{\rho c_p\bar{u}R}z+\dfrac{11}{24}\dfrac{q_wR}{\lambda}-\dfrac{2q_w}{\rho c_p\bar{u}R}z\right)}=\frac{48}{11}$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{Nu}=4{,}36. \qquad (5.46)$$

Заметим, что задача о конвективном теплообмене в трубе, на стенке которой вместо теплового потока задается линейно изменяющаяся по $z$ температура $T_w(z)=T_0+Az$, где $A$ – заданный коэффициент нарастания температуры, будет иметь решение, совпадающее с (5.45), за исключением первого члена, где множителем перед $z$ будет коэффициент $A$. В этом случае тепловой поток на стенке находится из соотношения (5.35).

## § 15. Теплообмен в круглой трубе при постоянной температуре стенки

### 15.1 Задача Гретца − Нуссельта

Рассмотрим полностью развитое стационарное течение в трубе в случае, когда на стенке трубы задаются тепловые граничные условия 1-го рода, т.е. фиксируется значение температуры стенки. При этом температура стенки везде однородна по периметру, но левой половине трубы ($z<0$) она равна $T_0$, а в точке $z=0$ скачкообразно до значения $T_w$ и остается такой во всей правой половине трубы ($z\geq 0$). Задача в такой постановке называется задачей Гретца − Нуссельта (рис. 5.5).

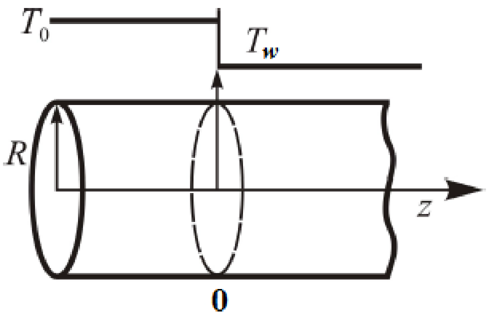


Рис. 5.5 − Геометрическая схема задачи теплообмена в трубе при постоянной температуре стенки

Поскольку, согласно рассуждениям, изложенным в § 11, продольным кондуктивным переносом можно пренебречь, температура жидкости в точке $z=0$ также будет равна $T_0$. Таким образом, аналогично § 14, решаем уравнение конвективного теплопереноса в круглых каналах (5.30), но с другими граничными условиями. Запишем это уравнение с несколько отличающимся обезразмериванием:

$$\mathrm{Pe}\left(1-\tilde{r}^2\right)\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{z}}=\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\tilde{r}\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{r}}\right), \tag{5.47}$$

где

$$\underbrace{\tilde{r}=\frac{r}{R},}_{1)}\quad \underbrace{\tilde{z}=\frac{z}{R},}_{2)}\quad \underbrace{\theta=\frac{T-T_w}{T_0-T_w}}_{3)}. \tag{5.47$'$}$$

Рассмотрим описанные выше граничные условия с учетом $(5.47'-3)$:

$$\theta\big|_{\tilde{z}=0}=1,\quad \theta\big|_{\tilde{r}=1}=0,\quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial\tilde{r}}\right|_{\tilde{r}=0}=0. \tag{5.48}$$

Ищем решение методом разделения переменных, т.е. представляем искомое решение в виде произведения двух функций, из которых одна зависит от радиальной переменной $\tilde{r}$, а вторая − от продольной переменной $\tilde{z}$:

$$\theta\left(\tilde{z},\tilde{r}\right)=\varphi\left(\tilde{z}\right)\psi\left(\tilde{r}\right). \tag{5.49}$$

(5.49) $\rightarrow$ (5.47) $\Rightarrow$

$$\varphi\psi''+\frac{1}{\tilde{r}}\varphi\psi'=\mathrm{Pe}\left(1-\tilde{r}^2\right)\varphi'\psi. \tag{5.50}$$

$\dfrac{(5.50)}{\varphi\psi}\Rightarrow$ уравнение с разделяющимися переменными вида:

$$\frac{\mathrm{Pe}\varphi'}{\varphi}=\frac{\psi''+\dfrac{1}{\tilde{r}}\psi'}{\psi\left(1-\tilde{r}^2\right)}=\mathrm{Const}\equiv-\varepsilon^2, \tag{5.51}$$

где $\varepsilon^2$ − константа разделения. Такое ее представление сложилось исторически и объясняется соображениями удобства. Постоянство левой и правой частей в равенстве (5.51) следует из того, что левая часть зависит только от $\tilde{z}$, а правая – только от $\tilde{r}$, и их равенство может иметь место только при условии их постоянства.

(5.51) $\Rightarrow$ два независимых дифференциальных уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tilde{z}} = -\frac{\varepsilon^2}{\mathrm{Pe}}\varphi, \qquad (5.52)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tilde{r}} + \varepsilon^2\left(1-\tilde{r}^2\right)\psi = 0. \qquad (5.53)$$

Общее решение (5.52) легко находится:

$$\varphi\left(\tilde{z}\right) = Ae^{-\frac{\varepsilon^2}{2\mathrm{Pe}}\tilde{z}}, \qquad (5.54)$$

где $A$ − подлежащая определению константа.

Из граничных условий (5.48) $\Rightarrow$ граничные условия для уравнения (5.53):

$$\underbrace{\left.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tilde{r}}\right|_{\tilde{r}=0} = 0}_{1)}, \quad \underbrace{\left.\psi\right|_{\tilde{r}=1} = 0}_{2)}. \qquad (5.55)$$

Введем новую переменную:

$$\xi \equiv \tilde{r}\varepsilon, \qquad (5.56)$$

так что $\psi = \psi\left(\xi\right)$. (5.56) $\rightarrow$ (5.53) $\Rightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} + \varepsilon^2\left(1-\frac{\xi^2}{\varepsilon^2}\right)\psi = 0. \qquad (5.57)$$

Ищем решение (5.57) в виде степенного ряда с постоянными коэффициентами:

$$\psi\left(\xi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\xi^n. \qquad (5.58)$$

(5.56) $\rightarrow$ (5.58) $\Rightarrow$ $\left.\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tilde{r}}\right|_{\tilde{r}=0} = b_1$, т.к. остальные члены ряда производной $\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tilde{r}}$ содержат множители, содержащие $\xi = \tilde{r}\varepsilon$ $\Rightarrow$ (5.55−1) $\Rightarrow$ $b_1 = 0$. Подставляя (5.58) $\rightarrow$ (5.57) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях $\xi$, можно найти рекуррентные соотношения для $b_i$. Оказалось, что первые два нечетных коэффициента из $b_i$ равны нулю ($b_1 = b_3 = 0$). Таким образом, т.к. общая рекуррентная формула для $b_i$ имеет вид, определяющий каждый нечетный коэффициент через два предыдущие нечетные, то получим, что отличны от нуля только четные коэффициенты. Поэтому (5.58) можно представить рядом только по четным степеням:

$$\psi\left(\xi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}\xi^{2n}. \qquad (5.59)$$

Оказалось также, что коэффициент $b_0$ входит во все остальные четные коэффициенты как множитель, поэтому в (5.59) его можно вынести за скобки ряда и в общем решении (5.49) включить в неопределенную константу $A$. Следовательно, на данном этапе без ограничения общности можно положить $b_0 = 1$. Тогда рекуррентные соотношения только для четных степеней имеют вид:

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_2 = -\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}\left(-b_0\right) \\ b_4 = \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2} - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{16}\left(\dfrac{b_0}{\varepsilon^2} - b_2\right). \\ \ldots \\ b_{2n} = \dfrac{1}{\left(2n\right)^2}\left(\dfrac{b_{2n-4}}{\varepsilon^2} - b_{2n-2}\right) \end{cases} \qquad (5.60)$$