Лекция 20

Раздел 7. Элементы теории массообмена

§ 20. Уравнения теории массообмена

20.1 Основные понятия

Массообмен − необратимый перенос массы компонента смеси в пределах одной или нескольких фаз.

Массообмен включает массоотдачу (перенос вещества от границы раздела в глубь фазы) и массопередачу (перенос вещества из одной фазы в другую через поверхность раздела фаз).

Осуществляется в результате хаотического движения молекул (молекулярная диффузия), макроскопического движения всей среды (конвективный перенос), а в турбулентных потоках − также в результате хаотического движения вихрей различного размера.

При наличии массопереноса в движущейся среде скорость движения отдельных компонентов вследствие диффузии может не совпадать со скоростью движения среды в целом. В качестве последней можно рассмотреть среднюю массовую скорость:

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{n} \rho_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho_i}, \tag{7.1}$$

где n − число компонентов смеси, ρ_i − парциальная плотность, v_i − скорость движения i-го компонента. При этом плотность смеси:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i . \tag{7.2}$$

Вектор плотности потока массы характеризует импульс единицы объема смеси и определяется согласно:

$$\vec{J} = \rho \vec{v} . \tag{7.3}$$

Отметим, что $[J] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$. (7.3) $\Rightarrow$ вектор плотности потока массы i-го компонента:

$$\vec{J}_i = \rho_i \vec{v}_i . \tag{7.3$'$}$$

(7.1) − (7.3), (7.3′) $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{J}_i = \vec{J} . \tag{7.4}$$

Рассмотрим характеристики конвективного и диффузионного процессов переноса массы. Плотностью конвективного потока массы i-го компонента называется величина, равная произведению $\rho_i \vec{v}$. Плотностью диффузионного потока массы i-го компонента называется величина, равная разности плотностей полного и конвективного потоков массы: $\vec{j}_i = \vec{J}_i - \rho_i \vec{v} \;\Rightarrow\;$ (7.3′) $\Rightarrow$

$$\vec{j}_i = \rho_i \left(\vec{v}_i - \vec{v} \right). \tag{7.5}$$

Диффузионный поток массы (7.5) не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, конвективный − зависит. Не трудно доказать, что:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{j}_i = 0. \tag{7.6}$$

Состав смеси можно охарактеризовать, например, с помощью массовой концентрации (доли) компонента c_i ($\left[c_i \right] = \text{ед.}$), которая показывает отношение парциальной плотности i-го компонента к плотности смеси (7.2):

$$c_i = \frac{\rho_i}{\rho}. \tag{7.7}$$

(7.7), (7.2) $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1. \tag{7.8}$$

При изучении совместных процессов тепло- и массообмена используется понятие энтальпии смеси h ($\left[h \right] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$). Для смеси идеальных газов:

$$h = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i. \tag{7.9}$$

Диффузионные потоки вещества возникают вследствие неоднородного распределения концентрации компонентов смеси в пространстве. Такая диффузия называется концентрационной и для нее справедлив закон Фика (аналог закона Фурье в случае массопереноса):

$$\vec{j}_i = -\rho D \operatorname{grad} c_i, \tag{7.10}$$

где ρ − плотность смеси (7.2), D − коэффициент диффузии ($\left[D \right] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$).

20.2 Уравнение диффузии

Рассмотрим четыре основных закона механики сплошных сред, т.е. систему уравнений баланса (1.5) − (1.8), в случае массопереноса.

Как было показано в п. 2.1, уравнение баланса момента импульса (1.7) выполняется тождественно.

Уравнение баланса массы (1.5):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad}\rho \cdot \vec{v} + \rho \operatorname{div}\vec{v} = 0. \tag{7.11}$$

Т.к. $\operatorname{div}\left(\vec{J} \right) = (7.3) = \operatorname{div}\left(\rho \vec{v} \right) = \operatorname{grad}\rho \cdot \vec{v} + \rho \operatorname{div}\vec{v} \;\Rightarrow$

$$\operatorname{div}\left(\rho \vec{v} \right) = \operatorname{grad}\rho \cdot \vec{v} + \rho \operatorname{div}\vec{v}. \tag{7.11′}$$

$(7.11') \rightarrow (7.11) \Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \vec{v}\right) = 0 . \qquad (7.12)$$

Уравнение (7.12) называется уравнением неразрывности.

В случае *i*-го компонента уравнение неразрывности (7.12) имеет вид:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho_i \vec{v}_i\right) = \chi_i , \qquad (7.13)$$

где χ_i − масса *i*-го компонента, образующегося в единицу времени в единице объема в результате химических реакций ($\left[\chi\right] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$). Уравнение (7.13) называется уравнением диффузии. Т.к. согласно основному закону химических реакций:

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_i = 0 , \qquad (7.14)$$

то суммирование левой и правой частей (7.13) по *i* компонентам приводит к уравнению неразрывности (7.12).

Преобразуем уравнение диффузии (7.13) так, чтобы его переменной являлась концентрация *i*-го компонента c_i. Учтем, что $\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = (7.7) = \frac{\partial\left(\rho c_i\right)}{\partial t} \Rightarrow$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + c_i \frac{\partial \rho}{\partial t} . \qquad (7.15)$$

Также $\mathrm{div}\left(\rho_i \vec{v}_i\right) = (7.5) = \mathrm{div}\left(\rho_i \vec{v} + \vec{j}_i\right) = \mathrm{div}\left(\rho_i \vec{v}\right) + \mathrm{div}\vec{j}_i = (7.7) = \mathrm{div}\left(\rho c_i \vec{v}\right) + \mathrm{div}\vec{j}_i$ $\Rightarrow$

$$\mathrm{div}\left(\rho_i \vec{v}_i\right) = c_i \mathrm{div}\left(\rho \vec{v}\right) + \mathrm{grad} c_i \cdot \rho \vec{v} + \mathrm{div}\vec{j}_i . \qquad (7.15')$$

(7.15), $(7.15') \rightarrow (7.13) \Rightarrow$

$$\rho\left(\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathrm{grad}\, c_i \cdot \vec{v}\right) = -\mathrm{div}\vec{j}_i + \chi_i . \qquad (7.16)$$

Уравнение диффузии вида (7.16) имеет вид, подобный виду уравнений баланса импульса и энергии, где левая часть уравнения характеризует скорость изменения физической величины (в данном случае − концентрации *i*-го компонента смеси), а правая − его источники (в данном случае − диффузионный поток массы *i*-го компонента и образование *i*-го компонента в результате химических реакций).

20.3 Уравнение энергии

Уравнение баланса импульса (1.6) в случае массопереноса также имеет физический смысл уравнения движения и в поле силы тяжести имеет вид:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\vec{v} \cdot \vec{v}\right) = \mathrm{div}T + \rho \vec{g} . \qquad (7.17)$$

Уравнение баланса внутренней энергии (1.8) в случае массопереноса на основании I начала термодинамики для смеси компонентов принимает вид:

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\mathrm{div}\left(h\vec{v}\right)\right)=-\mathrm{div}\vec{q}-\mathrm{div}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\vec{j}_i\right). \qquad (7.18)$$

(7.12) $\to$ (7.18) с учетом математических преобразований $\Rightarrow$

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\mathrm{grad}h\cdot\vec{v}\right)=-\mathrm{div}\vec{q}-\mathrm{div}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\vec{j}_i\right). \qquad (7.19)$$

Уравнение (7.19) называется уравнением энергии, и так же имеет вид, подобный виду уравнений баланса импульса и энергии. Левая часть уравнения характеризует скорость изменения энтальпии смеси, а правая − его источники (в данном случае − это теплоподвод к единице объема за счет теплового потока, обусловленного неоднородностью температуры, и за счет диффузионного потока массы *i*-го компонента).

Уравнение энергии (7.19) справедливо как при наличии химических реакций в многокомпонентной среде, так и при их отсутствии.

В общем виде, если условие $p=\mathrm{Const}$ не выполняется и существенна теплота трения, уравнение энергии (7.19) принимает вид:

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\mathrm{grad}h\cdot\vec{v}\right)=-\mathrm{div}\vec{q}-\mathrm{div}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\vec{j}_i\right)+\frac{\partial p}{\partial t}+\varepsilon, \qquad (7.20)$$

где ε − скорость диссипации энергии. Для диффузионного потока массы *i*-го компонента воспользуемся законом Фика: (7.10) $\to$ (7.20) $\Rightarrow$

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\mathrm{grad}h\cdot\vec{v}\right)=-\mathrm{div}\vec{q}+\mathrm{div}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\rho D\,\mathrm{grad}c_i\right)+\frac{\partial p}{\partial t}+\varepsilon. \qquad (7.21)$$

Учтем, что критерием подобия, определяющим соотношение между интенсивностями переноса массы компонента диффузией и переноса теплоты теплопроводностью, является число Льюиса:

$$\mathrm{Le}=\frac{a}{D}. \qquad (7.22)$$

(7.22) $\to$ (7.21) $\Rightarrow$

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\mathrm{grad}h\cdot\vec{v}\right)=-\mathrm{div}\vec{q}+\mathrm{div}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\rho D\left(1-\mathrm{Le}\right)\mathrm{grad}c_i\right)+\frac{\partial p}{\partial t}+\varepsilon. \qquad (7.23)$$

Отметим, что в прикладных задачах тепло- и массообмена двумя последними слагаемыми в (7.23) можно пренебречь.

В случае же $\mathrm{Le}=1$, когда уравнения диффузии и теплопроводности становятся идентичными, и профили концентраций компонентов и температуры оказываются подобными, уравнение энергии (7.23) значительно упрощается и может быть записано в форме Фурье − Остроградского:

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\mathrm{grad}h\cdot\vec{v}\right)=-\mathrm{div}\vec{q}. \qquad (7.24)$$

Также на практике часто встречаются случаи тепло- и массообмена в двухфазных системах (испарение, конденсация, сублимация и др.). При этом рассмотренные выше уравнения переноса справедливы для каждой фазы. На границе раздела фаз потоки вещества, энергии и импульса должны удовлетворять условиям, которые называются условиями совместимости.

Для двух фаз вещества в проекции на ось, перпендикулярную границе раздела фаз, получим:

$$\vec{J}'_{iy} = \vec{J}''_{iy}, \tag{7.25}$$

$$\vec{J}'_{y} = \vec{J}''_{y}, \tag{7.26}$$

где соотношение (7.25) представляет собой условие совместимости для векторов плотности потока массы *i*-го компонента, а (7.26) − уравнение баланса массы смеси (условие совместимости для векторов плотности потока массы).

Уравнение энергетического баланса для межфазной границы получим, интегрируя уравнения энергии (7.19) в некотором элементарном объеме и полагая его толщину (пределы интегрирования) стремящейся к нулю:

$$\vec{J}'_{y}h' + \sum_{i=1}^{n} h'_i \vec{j}'_{iy} + \vec{q}'_y = \vec{J}''_{y}h'' + \sum_{i=1}^{n} h''_i \vec{j}''_{iy} + \vec{q}''_y\,. \tag{7.27}$$