Лекция 21

§ 21. Диффузионный пограничный слой

21.1 Уравнения теории пограничного слоя при наличии массообмена

Понятие пограничного слоя, рассмотренное в п. 7.1 и 9.1 (для гидродинамического и теплового пограничных слоев соответственно), применяется также и при изучении процессов массообмена.

Аналогично $\delta \sim \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ (см. п. 7.1) и $\delta_T \sim \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Pe}}}$ (см. п. 9.1), толщина диффузионного пограничного слоя $\delta_D \sim \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Le}}}$. Таким образом, в основе теории пограничного слоя лежит допущение, что толщины δ, δ_T и δ_D малы по сравнению с характерным размером L. Данное условие выполняется при больших числах Re, Pe и Le. Тогда молекулярные процессы переноса импульса энергии и массы соответственно существенны только в самом пограничном слое, а за его пределами ими можно пренебречь.

Рассмотрим случай стационарного плоского пограничного слоя (направляя ось $0X$ вдоль поверхности и ось $0Y$ перпендикулярно ей).

Уравнение диффузии (7.16) в приближении теории пограничного слоя в стационарном случае с учетом закона Фика (7.10) будет иметь вид:

$$\rho\left(v_x\frac{\partial c_i}{\partial x}+v_y\frac{\partial c_i}{\partial y}\right)=\rho D\frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2}+\chi_i\,. \tag{7.28}$$

Оценим порядок входящих в уравнение движения (7.17) членов (по аналогии с п. 7.2 и п. 9.1) в проекции на $0X$ с учетом представления компоненты тензора напряжений (1.10) в координатной форме (1.46) в этом случае имеет вид:

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\rho g_x\,. \tag{7.29}$$

Отметим, что в проекции на $0Y$ уравнение (7.17) целиком исчезает вследствие малости порядка всех слагаемых, входящих в данное уравнение.

Уравнение неразрывности (7.12) в стационарном случае будет иметь вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0\,. \tag{7.30}$$

Уравнение энергии в приближении пограничного слоя в стационарном случае получим из упрощения уравнения (7.23):

$$\rho\left(v_x\frac{\partial h}{\partial x}+v_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\mu\,\mathrm{Pr}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\rho D\left(1-\mathrm{Le}\right)\frac{\partial c_i}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2+v_x\frac{\partial p}{\partial x}\,. \tag{7.31}$$

В прикладных задачах, как правило, два последних слагаемых в правой части (7.31) малы. Тогда (7.31) $\Rightarrow$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial h}{\partial x}+v_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)=\mu\,\mathrm{Pr}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{i=1}^{n}h_i\rho D\left(1-\mathrm{Le}\right)\frac{\partial c_i}{\partial y}\right). \qquad (7.32)$$

Система уравнений (7.28) − (7.30), (7.32) называется системой уравнений диффузионного пограничного слоя.

21.2 Массоотдача. Аналогия процессов тепло- и массопереноса.

Массоотдача − конвективный массообмен между движущейся средой и межфазной поверхностью.

Интенсивность этого процесса характеризуется коэффициентом массоотдачи β ($\left[\beta\right]=\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}$), который равен отношению плотности диффузионного потока массы (7.5) данного i-го компонента на границе раздела фаз к разности массовых концентраций (7.7) этого компонента в потоке среды и на поверхности раздела:

$$\beta=\frac{j_{iw}}{\Delta c_i}, \qquad (7.33)$$

где

$$\Delta c_i=c_{i\infty}-c_{iw}\,. \qquad (7.33')$$

Здесь $c_{i\infty}$ и c_{iw} − массовые концентрации i-го компонента вдали от границы раздела фаз и на ее поверхности, j_{iw} − проекция $\vec{j}_i$ на нормаль к поверхности раздела фаз.

(7.33′) $\rightarrow$ (7.33) $\Rightarrow$

$$j_{iw}=\beta\left(c_{i\infty}-c_{iw}\right), \qquad (7.34)$$

что является аналогией закона Ньютона (1.40) для теплового потока, определяемого теплообменом между жидкостью и окружающей средой. При этом значение j_{iw} для концентрационной диффузии также можно найти из закона Фика (7.10):

$$j_{iw}=-\rho D\left(\frac{\partial c_i}{\partial n}\right)_w, \qquad (7.35)$$

что является аналогией закона Фурье (1.39).

Таким образом, из сравнения (7.34) и (7.35) с (1.40) и (1.39) соответственно получим, что величины β и ρD являются аналогами коэффициентов теплообмена α и теплопроводности λ в случае процессов массопереноса.

Исходя из рассмотренной аналогии процессов тепло- и массопереноса, введем диффузионное число Нуссельта:

$$\mathrm{Nu}_D=\frac{\beta L}{\rho D}, \qquad (7.36)$$

диффузионное число Грасгофа:

$$\mathrm{Gr}_D = \frac{\Delta\rho}{\rho}\frac{gL^3}{\nu^2}, \qquad (7.37)$$

а также диффузионное число Прандтля:

$$\mathrm{Pr}_D = \frac{\nu}{D}. \qquad (7.38)$$

Исходя из анализа системы уравнений диффузионного пограничного слоя (7.28) − (7.30), (7.32), в полном соответствии с рассмотренной в п. 9.2 аналогией Рейнольдса, полученной при изучении системы уравнений теплового пограничного слоя, можно, не прибегая к решению данной системы, получить практически важные следствия об аналогии различных процессов при конвективном массопереносе.

Таким образом, получим:

$$\mathrm{Nu}_D = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}_D, \mathrm{Gr}_D\right); \qquad (7.39)$$

в то же время при конвективном теплопереносе (см. п. 9.2):

$$\mathrm{Nu} = \varphi\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Gr}\right). \qquad (7.39')$$

При вынужденной конвекции, когда влияние свободной конвекции пренебрежимо мало, (7.39) $\Rightarrow$

$$\mathrm{Nu}_D = f\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}_D\right); \qquad (7.40)$$

в то же время при конвективном теплопереносе (см. п. 9.2):

$$\mathrm{Nu} = \varphi\left(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr}\right). \qquad (7.40')$$

Отметим, что если зависимости вида $(7.39')$ и $(7.40')$ известны, то с их помощью можно рассчитать коэффициент массоотдачи β аналогично расчету коэффициента теплообмена α. Для этого достаточно в формулах, справедливых для процессов теплообмена, заменить соответствующие критерии подобия на диффузионные, т.е. перейти от $(7.39')$ и $(7.40')$ к (7.39) и (7.40) соответственно.

Так, например, в случае конвективного теплообмена при обтекании плоской пластины справедливо соотношение (5.7):

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}\sqrt{\mathrm{Re}_x}. \qquad (7.41')$$

Значит, в случае конвективного массообмена получим:

$$\mathrm{Nu}_{Dx} = 0{,}332\sqrt[3]{\mathrm{Pr}_D}\sqrt{\mathrm{Re}_x}. \qquad (7.41)$$

Рассмотрим случай, когда коэффициенты температуропроводности, диффузии и вязкости равны, т.е. из п. 3.3. и (7.22), (7.38) $\Rightarrow$ $\mathrm{Pr} = \mathrm{Le} = \mathrm{Pr}_D = 1$. Тогда уравнения энергии, диффузии и движения отличаются только обозначениями величин, и при подобных граничных условиях (например, $c_{iw} = \mathrm{Const}$, $T_w = \mathrm{Const}$) распределения температуры, концентрации и скорости будут подобны, а в безразмерном виде тождественны. Т.е. для введенных безразмерных переменных вида:

$$\tilde{\theta} = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

$$\tilde{c}_i = \frac{c_i - c_{i\infty}}{c_{iw} - c_{i\infty}} \qquad (7.42')$$

$$\tilde{v}_x = \frac{v_x - v_\infty}{v_\infty}$$

получим, что:

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \frac{c_i - c_{i\infty}}{c_{iw} - c_{i\infty}} = \frac{v_x - v_\infty}{v_\infty}. \qquad (7.42)$$

Т.к. из (1.39), (7.35) и $(3.25'')$ при $y = 0 \Rightarrow$

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \Bigg|_{y=0}$$

$$j_{iw} = -\rho D \left(\frac{\partial c_i}{\partial y} \right) \Bigg|_{y=0}, \qquad (7.43)$$

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \Bigg|_{y=0}$$

то из (7.43) $\rightarrow \left. \frac{\mathrm{d}(7.42)}{\mathrm{d}y} \right|_{y=0} \Rightarrow$

$$\frac{q_w}{\lambda (T_w - T_\infty)} = \frac{j_{iw}}{\rho D (c_{iw} - c_{i\infty})} = \frac{\tau_w}{\mu v_\infty}. \qquad (7.44)$$

Учтем, что безразмерный комплекс вида:

$$\mathrm{St} = \frac{\alpha}{\rho c_p v_\infty} \qquad (7.45)$$

называется числом Стэнтона (является безразмерной формой коэффициента теплоотдачи), а вида:

$$\mathrm{St}_D = \frac{\beta}{\rho v_\infty} \qquad (7.46)$$

– диффузионным числом Стэнтона. Кроме того, из $(3.26') \Rightarrow$

$$C'_f = \frac{2\tau}{\rho v_\infty^2} \qquad (7.47)$$

– локальный безразмерный коэффициент сопротивления. (1.40) $\rightarrow$ (7.45) и (7.34) $\rightarrow$ (7.46) $\Rightarrow$

$$\mathrm{St} = \frac{q_w}{\rho c_p v_\infty (T_w - T_\infty)}, \qquad (7.45')$$

$$\mathrm{St}_D = \frac{j_{iw}}{\rho v_\infty (c_{iw} - c_{i\infty})}. \qquad (7.46')$$

$(7.45')$, $(7.46')$, (7.47) $\to$ $(7.44)\cdot\dfrac{\lambda}{\rho c_p v_\infty}$ с учетом того, что в рассматриваемом случае $a = D = \mu$ (т.е. $\mathrm{Pr} = \mathrm{Le} = \mathrm{Pr}_D = 1$) $\Rightarrow$

$$\mathrm{St} = \mathrm{St}_D = \frac{C_f'}{2}. \tag{7.48}$$

Соотношение (7.48) называется тройной аналогией процессов переноса теплоты (температуропроводности), вещества (диффузии) и импульса (вязкости). Это соотношение эквивалентно аналогии Рейнольдса для процессов конвективного теплообмена (формула $(4.16'')$ для случая $\mathrm{Pr} = 1$).

Отметим, что в случае $\mathrm{Pr} \neq 1$ и $\mathrm{Pr}_D \neq 1$, справедливо соотношение

$$\mathrm{St}\mathrm{Pr}^n = \mathrm{St}_D \mathrm{Pr}_D^n = \frac{C_f'}{2}, \tag{7.49}$$

где $n = \dfrac{2}{3}$ для ламинарных и $n = 0{,}6$ для турбулентных течений соответственно.

Соотношение (7.49), как и (7.48), также называется аналогией Рейнольдса.