

Решения задач.

Задача 1

1. Для построения графика следует заметить, что
- при $x = a$ потенциальная энергия равна нулю $U(a) = 0$;
 - при больших $x \gg a$ функция приближается к квадратичной зависимости

$$U(x) = \frac{k}{8} \left(x - \frac{a^2}{x} \right)^2 \approx \frac{k}{8} x^2, \quad (1)$$

графиком которой является парабола;

- при малых x выражение для потенциальной энергии приближенно описывается функцией

$$U(x) = \frac{k}{8} \left(x - \frac{a^2}{x} \right)^2 \approx \frac{k}{8} \frac{a^4}{x^2}, \quad (2)$$

поэтому при $x \rightarrow 0$ потенциальная энергия стремится к бесконечности $U \rightarrow +\infty$.
Схематический график рассматриваемой зависимости показан на рис. 1.

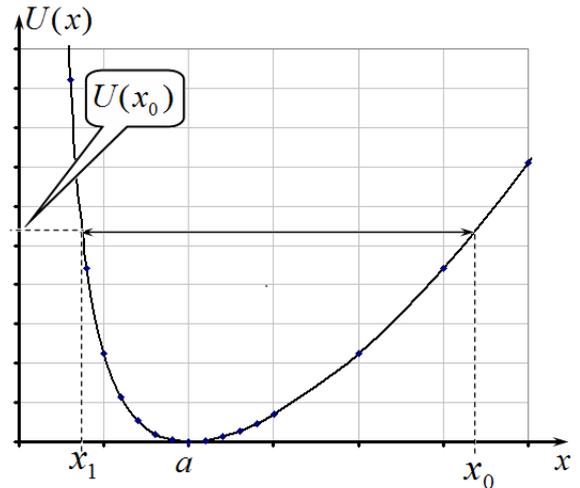


Рис. 1

2. Положению равновесия соответствует точка минимума потенциальной энергии, поэтому ее координата равна

$$\bar{x} = a. \quad (3)$$

3. Для определения предельных точек движения тела запишем уравнение закона сохранения механической энергии тела:

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = U(x_0). \quad (4)$$

В крайних точках (которые также называются точками возврата) скорость тела обращается в нуль. Поэтому для определения их координат необходимо решить уравнение

$$U(x) = U(x_0) \Rightarrow \frac{k}{8} \left(x - \frac{a^2}{x} \right)^2 = \frac{k}{8} \left(x_0 - \frac{a^2}{x_0} \right)^2 \quad (5)$$

Решить это уравнение не сложно, особенно если заметить, что данная функция симметрична относительно замены $x \Rightarrow \frac{a^2}{x}$:

$$\frac{k}{8} \left(x - \frac{a^2}{x} \right)^2 = \frac{ka^2}{8} \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x} \right)^2 \Rightarrow U(x) = U\left(\frac{a^2}{x} \right). \quad (6)$$

Отсюда следует, что в процессе движения координата тела будет изменяться в пределах

$$x_1 = \frac{a^2}{x_0} \leq x \leq x_0. \quad (7)$$

Этот интервал показан на рис. 1.

4. Упростим выражение для потенциальной энергии, используя малость отклонения от положения равновесия. Для этого совместим начало отсчета с положением равновесия, т.е. представим координату точки в виде

$$x = a + z, \quad (8)$$

здесь $z \ll a$. Тогда зависимость потенциальной энергии от смещения z примет вид

$$U(z) = \frac{k}{8} \left(x - \frac{a^2}{x} \right)^2 = \frac{k}{8} \left((a+z) - \frac{a^2}{a+z} \right)^2 = \frac{k}{8} \left((a+z) - \frac{a^2}{a \left(1 + \frac{z}{a} \right)} \right)^2 \approx$$

$$\approx \frac{k}{8} \left((a+z) - a \left(1 - \frac{z}{a} \right) \right)^2 = \frac{kz^2}{2}$$

В ходе преобразований использована приближенная формула, приведенная в условии задачи. Перепишем уравнение (4), используя полученное приближенное выражение для потенциальной энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kz^2}{2} = U(x_0) = const. \quad (10)$$

Полученное уравнение является уравнением гармонических колебаний (аналогичное колебаниям груза на пружине), поэтому период таких колебаний рассчитывается по известной формуле для периода колебаний пружинного маятника

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (11)$$

Дадим графическую иллюстрацию (от участников не требуется) использованного приближения. Фактически мы заменили сложную потенциальную кривую параболой вблизи положения равновесия (см. Рис.2)

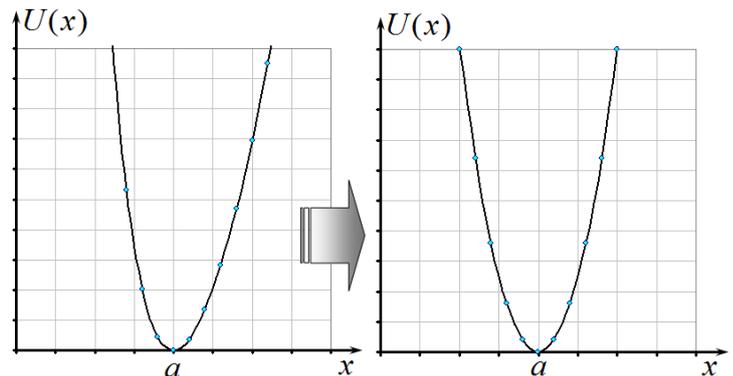


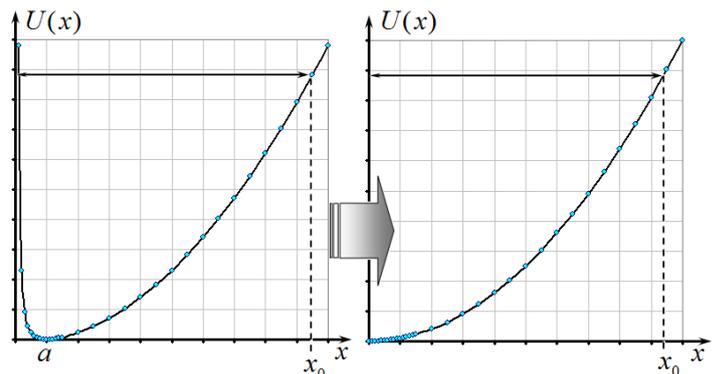
Рис. 2

5. При большом начальном отклонении тела $x_0 \gg a$ можно использовать другое приближение. Координата второй точки возврата $x_1 = \frac{a^2}{x_0}$ стремится к нулю, или что равносильно, можно считать, что $a \rightarrow 0$. В этом случае потенциальную функцию можно приближенно представить в виде

$$U(x) = \begin{cases} \frac{kx^2}{8}, & x > 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

На рис. 3 показана эта приближенная функция.

В этом случае движения тела можно описать следующим образом: при $x > 0$ его движение совпадает с движением



груза на пружине жесткости $k' = \frac{k}{4}$, а при достижении точки $x = 0$ происходит упругий удар в ходе которого скорость практически мгновенно изменяет направление движения на противоположное с сохранением модуля скорости. Этот «процесс» иллюстрирует рисунок-заставка в условии задачи. Следовательно, период колебаний в данном случае равен половине периода колебаний груза на пружине указанной жесткости, т.е.

$$T_2 = \frac{1}{2} T' = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{m}{k'}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (13)$$

Можно показать, что в данной задаче период не зависит от начального положения и определяется полученной формулой (13).

Задача 2

1. Основная идея решения данной задачи вполне очевидна: необходимо выразить заданное значение работы газа A через заданные значения температур T_1 и T_3 искомую температуру T_0 и решить полученное уравнение.

Обозначим значения давлений и объемов газа в узлах цикла, как показано на рисунке. Работу газа можно найти как площадь цикла на диаграмме

$$A = (P_1 - P_0)(V_3 - V_0) = P_1V_3 - P_1V_0 - P_0V_3 + P_0V_0. \quad (1)$$

Далее воспользуемся уравнением состояния газа для 1 моля:

$$PV = RT. \quad (2)$$

С помощью этого уравнения получим, что слагаемые в формуле (1) выражаются через соответствующие температуры:

$$\begin{aligned} P_0V_0 &= RT_0 \\ P_1V_0 &= RT_1. \\ P_0V_3 &= RT_3 \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы получить выражение для произведения P_1V_3 воспользуемся уравнением изобарного процесса $3 \rightarrow 0$:

$$\frac{V_3}{V_0} = \frac{T_3}{T_0} \Rightarrow V_3 = V_0 \frac{T_3}{T_0}. \quad (4)$$

Поэтому

$$P_1V_3 = P_1V_0 \frac{T_3}{T_0} = R \frac{T_1T_3}{T_0}. \quad (5)$$

Подставляя полученные выражения в формулу (1), получим уравнение для определения температуры T_0

$$\begin{aligned} A &= (P_1 - P_0)(V_3 - V_0) = P_1V_3 - P_1V_0 - P_0V_3 + P_0V_0 = \\ &= R \frac{T_1T_3}{T_0} - RT_1 - RT_3 + RT_0 \end{aligned} \quad (6)$$

Это уравнение приводится к квадратному уравнению

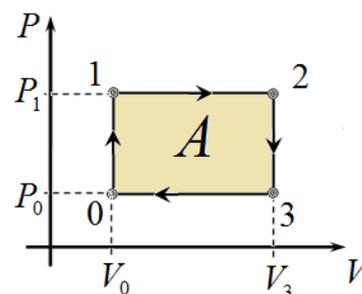
$$\begin{aligned} T_0 - (T_1 + T_3) + \frac{T_1T_3}{T_0} - \frac{A}{R} &= 0 \Rightarrow \\ T_0^2 - \left(T_1 + T_3 + \frac{A}{R}\right)T_0 + T_1T_3 &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Два корня этого уравнения задаются формулами

$$T_0 = \frac{\left(T_1 + T_3 + \frac{A}{R}\right) \pm \sqrt{\left(T_1 + T_3 + \frac{A}{R}\right)^2 - 4T_1T_3}}{2}. \quad (8)$$

Эти два корня имеют смысл температур в состояниях 0 и 2. Так как необходимо найти температуру в состоянии 0, которая является минимальной температурой в цикле, то следует выбрать меньший из корней (8). Следовательно, искомая температура равна

$$T_0 = \frac{\left(T_1 + T_3 + \frac{A}{R}\right) - \sqrt{\left(T_1 + T_3 + \frac{A}{R}\right)^2 - 4T_1T_3}}{2}. \quad (9)$$



2. Подстановка заданных значений работы и температур в формулу (9) дает результат

$$\left(T_1 + T_3 + \frac{A}{R}\right) = T_1 + 2T_1 + \frac{3}{2}T_1 = \frac{9}{2}T_1; \quad 4T_1T_3 = 8T_1^2 \Rightarrow \quad (10)$$

$$T_0 = \frac{\left(T_1 + T_3 + \frac{A}{R}\right) - \sqrt{\left(T_1 + T_3 + \frac{A}{R}\right)^2 - 4T_1T_3}}{2} = \frac{\frac{9}{2}T_1 - \sqrt{\left(\frac{9}{2}T_1\right)^2 - 8T_1^2}}{2} = \frac{1}{2}T_1$$

Окончательно получаем,

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{1}{2}. \quad (11)$$

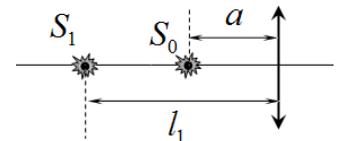
Заметим, что второй корень (8) уравнения (7) при заданных параметрах равен $T_0 = 4T_1$ соответствует температуре в состоянии 2 рассматриваемого процесса.

Задача 3

Рассмотрим последовательность формирования изображений, соответствующую ходу световых лучей от зрачка (как источника света S_0) до зрачка (как приемника окончательного изображения).

Линза очков формирует изображение зрачка S_1 , которой находится на расстоянии l_1 от линзы. Это расстояние рассчитывается с помощью формулы линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{l_1} = \frac{1}{F} \Rightarrow l_1 = \frac{aF}{a - F} = -3,41 \text{ см} . \quad (1)$$

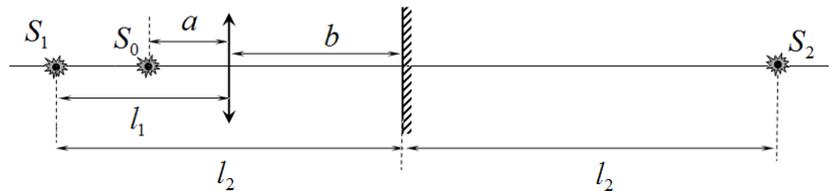


Так как предмет (зрачок) находится между линзой и фокусом, то его изображение является мнимым и находится до линзы.

Это изображение отражается в плоском зеркале, в результате чего появляется изображение S_2 , расположенное симметрично относительно зеркала на расстоянии l_2 от зеркала.

Из рисунка следует, что это расстояние равно

$$l_2 = |l_1| + b = 33,41 \text{ см} . \quad (2)$$



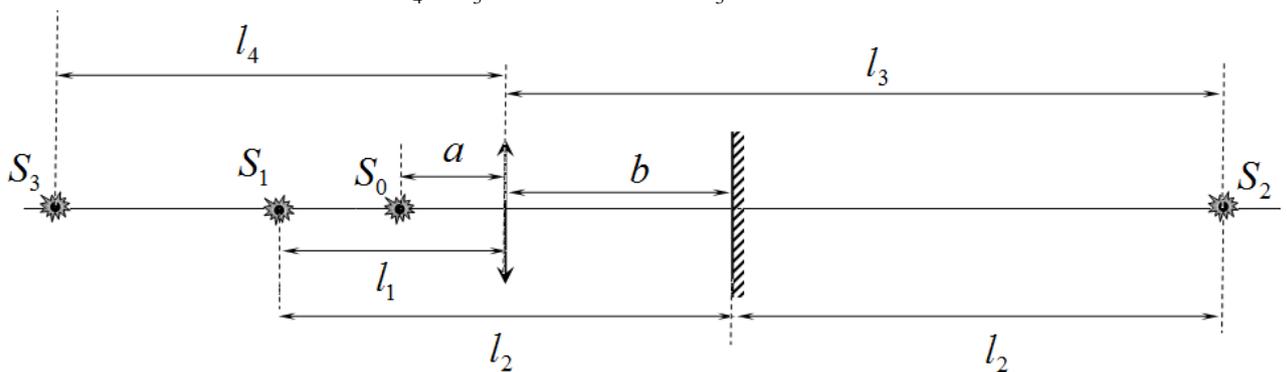
Или это изображение находится на расстоянии

$$l_3 = l_2 + b = 63,41 \text{ см} \quad (3)$$

от линзы.

Наконец, повторно используя формулу линзы, находим положение изображения в линзе (именно это изображение теоретически сможет увидеть «очкарик»)

$$\frac{1}{l_4} + \frac{1}{l_3} = \frac{1}{F} \Rightarrow l_4 = \frac{l_3 F}{l_3 - F} = 41,27 \text{ см} \quad (4)$$



Окончательно получаем, что расстояние между зрачком и его изображением равно

$$\Delta a = l_4 - a = 38,3 \text{ см} . \quad (5)$$

Задача 4

1. Проведем требуемый расчет объемов.

Объем между полушариями

$$V_0 = \frac{\pi D^3}{6} = 0,52 \text{ м}^3. \quad (1)$$

Объем насоса

$$V_1 = \frac{\pi d^2}{4} l = 3,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3. \quad (2)$$

2. Для расчета силы давления на одно полушарие необходимо спроецировать все сил действующие нормально на отдельные участки полусферы, на горизонтальное направление. Такое суммирование широко известно, оно приводит к результату

$$F = \Delta P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = (1 - \eta) P_0 \frac{\pi D^2}{4} = 7,1 \cdot 10^4 \text{ Н}. \quad (3)$$

3. Каждая лошадь должна тянуть с силой

$$F_1 = \frac{F}{8} = 8,8 \cdot 10^3 \text{ Н}. \quad (4)$$

Заметим, что делить надо на число лошадей с одной стороны, т.е. на 8. Кроме того, эта сила не так уж велика.

4. В каждом цикле откачки при вытягивании поршня объем газа увеличивается от V_0 до $(V_0 + V_1)$. Поэтому согласно закону Бойля – Мариотта за один цикл давление уменьшается в

$$\gamma = \frac{V_0}{V_0 + V_1} = 0,94 \quad (5)$$

раз. Следовательно последовательность значений давлений после k циклов откачки образует геометрическую прогрессию

$$P_k = P_0 \gamma^k \quad (6)$$

Для расчета числа циклов откачки запишем

$$\eta P_0 = P_0 \gamma^N. \quad (7)$$

Откуда находим

$$N = \frac{\ln \eta}{\ln \gamma} \approx 40.$$

5. Так как в процессе расширения изменение объема не слишком велико, то для оценки произведенной работы можно считать, что давление газа в насосе изменяется по линейному закону. В таком случае работу, производимую мужчинами за один цикл, можно подсчитать по формуле

$$A_k = \left(P_0 - \frac{P_{k-1} + P_k}{2} \right) V_1 = P_0 V_1 \left(1 - \frac{1 + \gamma}{2} \gamma^{k-1} \right) \quad (8)$$

Для расчета полной работы необходимо вычислить сумму работ за все циклы

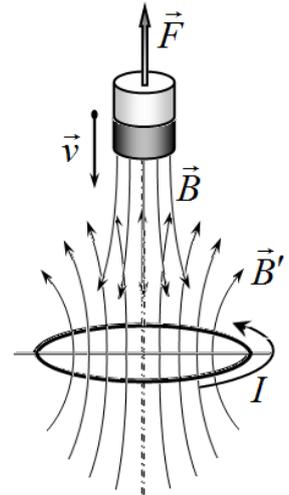
$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^N A_k = \sum_{k=1}^N P_0 V_1 \left(1 - \frac{1 + \gamma}{2} \gamma^{k-1} \right) = P_0 V_1 \left(N - \frac{1 + \gamma}{2} \frac{1 - \gamma^N}{1 - \gamma} \right) = \\ &= P_0 V_1 \left(N - \frac{1 + \gamma}{2} \frac{1 - \eta}{1 - \gamma} \right) = P_0 V_1 (40 - 15) \approx 7,8 \cdot 10^4 \text{ Дж} \end{aligned} \quad (9)$$

Оказывается, что откачать воздух не так уж и легко!

Задача 5

1. При приближении магнита к кольцу:

- магнитный поток через кольцо увеличивается;
- в кольце возникает ЭДС индукции;
- которая приводит к возникновению электрического тока в кольце I ;
- этот ток создает магнитное поле \vec{B}' ;
- это поле действует на магнит, что приводит к появлению силы \vec{F} ;
- которая уравнивает силу тяжести;
- поэтому магнит может оказаться в состоянии равновесия.



По правилу Ленца магнитная сила препятствует увеличению магнитного потока через кольцо, поэтому она направлена вверх.

2. Так как кольцо сверхпроводящее, то его сопротивление равно нулю, поэтому ЭДС самоиндукции уравнивает ЭДС индукции, возникающей вследствие изменения магнитного потока внешнего поля (то есть поля постоянного магнита):

$$-L \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} . \quad (1)$$

Здесь

$$\Phi = \pi R^2 B_z = \pi R^2 B_0 \left(\frac{a}{z} \right)^3 , \quad (2)$$

Магнитный поток через кольцо, создаваемый постоянным магнитом. Так как при начальном большом удалении магнита от кольца магнитный поток был равен нулю, то из уравнения (1) следует, что (записывает для модулей):

$$LI = \Phi . \quad (3)$$

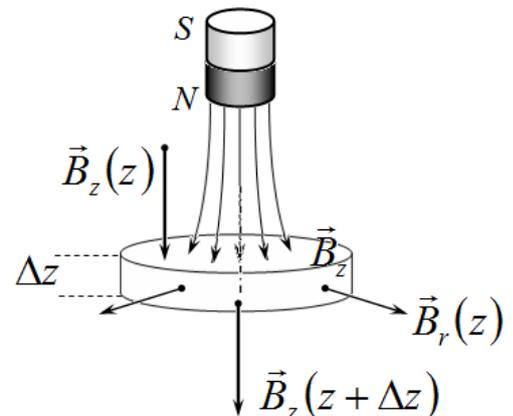
Или

$$I(z) = \frac{\pi R^2 B_0}{L} \left(\frac{a}{z} \right)^3 . \quad (4)$$

3. Для расчета силы, действующей со стороны поля кольца на магнит, удобно воспользоваться 3 законом Ньютона: эта силы по модулю равна силе, действующей на кольцо со стороны постоянного магнита. Понятно, что данная сила является силой Лоренца. Интересующая нас вертикальная составляющая этой силы определяется радиальной (горизонтальной) составляющей вектора индукции \vec{B}_r :

$$F = 2\pi R I B_r . \quad (5)$$

Для расчета радиальной составляющей поля воспользуемся теоремой о магнитном потоке через замкнутую поверхность. В качестве такой поверхности выберем поверхность тонкого цилиндра, ось которого совпадает с осью рассматриваемой системы, радиус которого равен радиусу кольца, а толщина мала и равна Δz . Полный поток через поверхность этого цилиндра равен:



$$\pi R^2 B_z(z + \Delta z) - \pi R^2 B_z(z) + 2\pi R \Delta z B_r = 0. \quad (6)$$

Из этого уравнения находим

$$B_r = -\frac{R}{2} \frac{B_z(z + \Delta z) - B_z(z)}{\Delta z} = -\frac{R}{2} \frac{dB_z}{dz} = \frac{3R}{2} B_0 \frac{a^3}{z^4} \quad (7)$$

Поэтому окончательно находим силу взаимодействия между кольцом и магнитом

$$F = 2\pi R I B_r = 2\pi R \cdot \left(\frac{\pi R^2 B_0}{L} \left(\frac{a}{z} \right)^3 \right) \cdot \left(\frac{3R}{2} B_0 \frac{a^3}{z^4} \right) = \frac{3\pi^2 R^3 B_0^2}{L} \frac{a^6}{z^7}. \quad (8)$$

4. Для определения положения равновесия найденную силу (8) следует приравнять к силе тяжести:

$$\frac{3\pi^2 R^3 B_0^2}{L} \frac{a^6}{z_0^7} = mg. \quad (9)$$

Отсюда находим расстояние от центра кольца до равновесного положения магнита

$$z_0 = \sqrt[7]{\frac{3\pi^2 R^3 B_0^2 a^6}{Lmg}}. \quad (10)$$

5. Если в начальный момент времени магнит находился в центре кольца, то:

- магнитный поток через кольцо был равен нулю;

- магнит начнет смещаться вниз, магнитный поток через кольцо начнет изменяться....

далее можно повторить все предыдущие рассуждения и выкладки и прийти к тому же результату: магнит окажется в положении равновесия на расстоянии, описываемом формулой (10), только... ниже кольца!