Белорусский государственный университет
Физический факультет
«Абитуриент физического факультета - 2022»

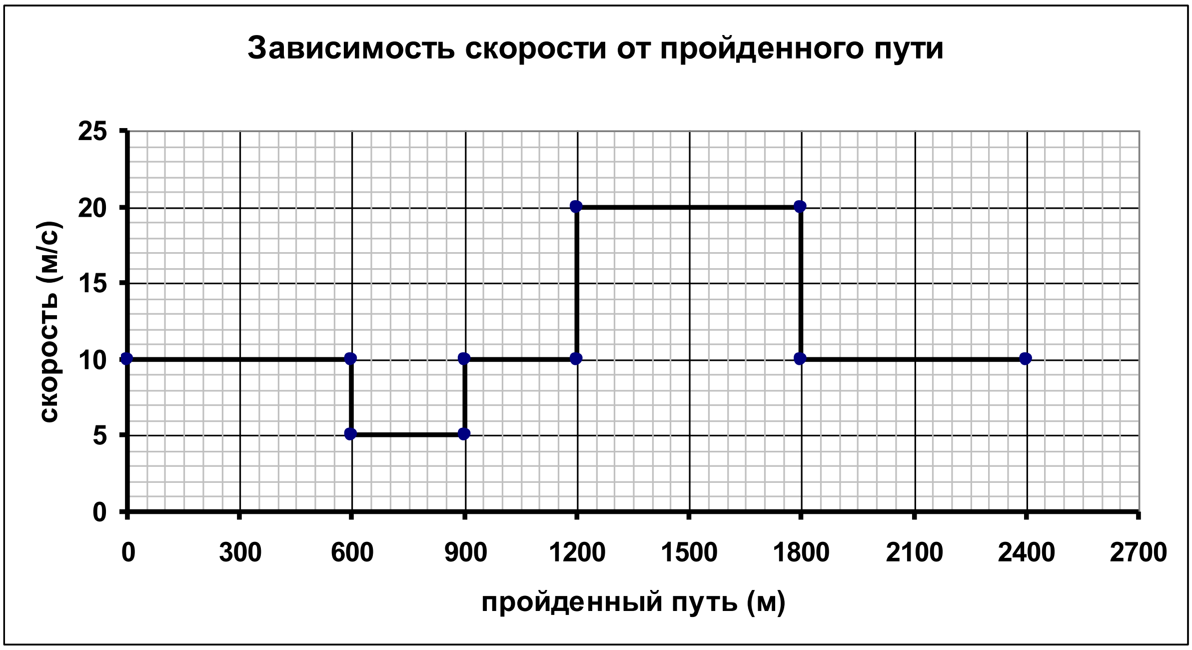
Вариант 1

Задача 1. Гонка преследования.

Во время соревнований лыжников, как правило, указывают отставания одного спортсмена от другого в секундах, а не в метрах, например: «отстает на 10 секунд, а не на 100 метров».

Задумывались ли Вы, почему именно так? В данной модельной задаче Вам необходимо показать, что при постоянном временном запаздывании расстояние между спортсменами может изменяться в достаточно широких пределах.

На рисунке показан график зависимости скорости первого спортсмена от пройденного от точки старта пути. Считайте, что время старта этого спортсмена $t = 0$. В дальнейшем все времена отсчитывайте от момента старта первого спортсмена.

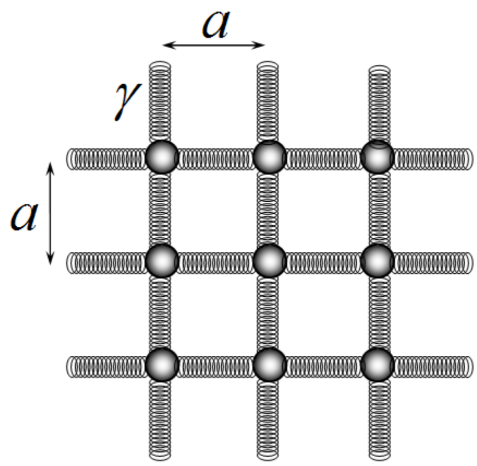


Второй спортсмен стартует через 30 секунд после первого. Он движется по дистанции с такой же зависимостью скорости от пройденного пути, как и первый.

1. Постройте график зависимости скорости первого спортсмена от времени.
2. Постройте графики зависимостей координат (т.е. расстояния от точки старта) обоих спортсменов от времени.
3. Постройте график зависимости расстояния между первым и вторым спортсменом от времени.
4. Укажите, где находились спортсмены (т.е. на каких расстояниях от старта), когда расстояние между ними было максимально.

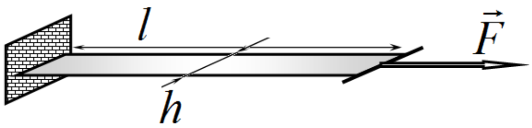
Задача 2. Воздушный шарик.

Механические свойства полимеров разнообразны и очень сложны. Поэтому для описания этих свойств использует различные модели. Одна из таких моделей рассматривается в данной задаче.



Микроструктура тонкой резиновой пленки представляет собой однослойную квадратную сетку, в узлах которой находятся небольшие шарики, соединенные между собой упругими пружинками. Диаметры шариков значительно меньше расстояния между шариками, которые равны длинам пружин a (при этом пружинки не деформированы). Жесткости пружин равны γ, т.е. при растяжении пружины на величину x, возникающая сила упругости равна $f = \gamma x$. В дальнейшем считайте, что размер ячейки a значительно меньше размеров рассматриваемых тел, сделанных из этой резиновой пленки.

Часть 1. Резиновая полоска.



Для изучения упругих свойств пленки из нее вырезали полоску длиной l и шириной h (в недеформированном состоянии). Один край полоски закрепили, а ко второму приложили постоянную силу F. В результате измерений, получено, что удлинение полоски Δl связано с величиной приложенной силы F посредством закона Гука $F = k\Delta l$.

1.1 Выразите значение коэффициента жесткости полоски k через ее размеры l, h и микропараметры модели a, γ.

Часть 2. Воздушный шарик.

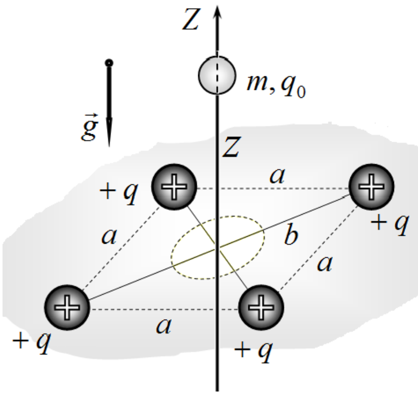
Из описанной резиновой пленки изготовили воздушный шар, радиус которого в недеформированном состоянии равен R_0. Шар накачивают воздухом. При не растянутой резине давление воздуха внутри шара равно атмосферному давлению P_0. Далее считайте, что резиновая пленка шарика и воздух внутри него находятся в состоянии равновесия.

2.1 Найдите зависимость давления воздуха в воздушном шарике от его радиуса. Постройте схематический график этой зависимости. 2.2 Определите, при каком максимальном давлении шарик может находится в состоянии равновесия.

Задача 3. Электростатическая левитация.

Левитация - *неподвижное зависание объекта в воздухе без какой-либо механической опоры или подвеса.*

Чтобы «подвесить» небольшой шарик создана следующая установка. На горизонтальной непроводящей плоскости закреплены четыре небольших шарика, электрический заряд каждого равен $+q$. Эти шарики находятся в вершинах квадрата на расстоянии b от его центра. Через центр квадрата проходит тонкий непроводящий стержень, по которому может скользить без трения небольшой шарик массы m, имеющий электрический заряд q_0. В горизонтальной плоскости проделано отверстие, позволяющее шарику находится как выше, так и ниже плоскости.



Совместим вертикальную ось Z со стержнем, начало отсчета которой находится плоскости с заряженными шариками.

Часть 1. Напряженность поля, создаваемого зарядами на плоскости.

Обозначим E_z проекцию вектора напряженности электрического поля, создаваемого четырьмя зарядами на плоскости, на ось Z.

1.1. Найдите зависимость величины $E_z(z)$ на стержне от координаты z.

1.2. Представьте полученную зависимость $E_z(z)$ в виде

$$E_z(\xi) = E_0 f(\xi), \tag{1}$$

где E_0 - постоянная величина, зависящая от заряда шариков q и расстояния b от шариков до стержня (длины половины диагонали квадрата); $f(\xi)$ - безразмерная функция, зависящая только от величины $\xi = \frac{z}{b}$ (отношения координаты z к расстоянию b).

1.3. Получите приближенные выражения для функции $E_z(\xi)$ в двух предельных случаях: $E_{(0)}(\xi)$ при $\xi << 1$ (т.е. при $z << b$); $E_{(\infty)}(\xi)$ при $\xi >> 1$ (т.е. при $z >> b$).

1.4. Нарисуйте схематические графики функции $E_z(z)$ и ее приближений.

Часть 2. Зависание.

В этой части Вам необходимо найти возможные положения «зависания» шарика на стержне.

Масса и заряд подвижного шарика на стержне подобраны таким образом, что $\frac{m_0 g}{|q_0 E_0|} = \eta = 0{,}050$, где E_0 - постоянная в формуле (1), g - ускорение свободного падения.

2.1 Рассчитайте, на каком расстоянии от плоскости z (рассчитайте соответствующие численные значения параметра $\xi = \frac{z}{b}$) может «зависать» шарик на стержне, если

а) заряд подвижного шарика положительный; б) заряд подвижного шарика отрицательный.

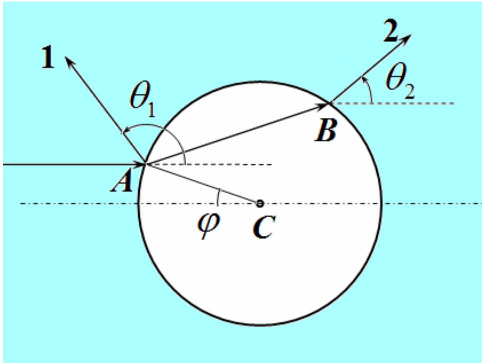
Задача 4. Пузырек в воде.

Воздушные пузыри, поднимающиеся в воде, могут создавать эффектное зрелище, особенно, если их хорошо осветить.

В данной задаче Вам необходимо рассмотреть прохождение света через воздушный пузырь сферической формы, находящийся в воде.

Показатель преломления воды равен $n = 1{,}33$.

Часть 1. Отражение и преломление.



Сферический пузырь полностью освещается параллельным пучком света. Рассмотрим некоторый луч, падающий на пузырь в точке A. Положение этого луча удобно характеризовать углом φ, показанным на рисунке.

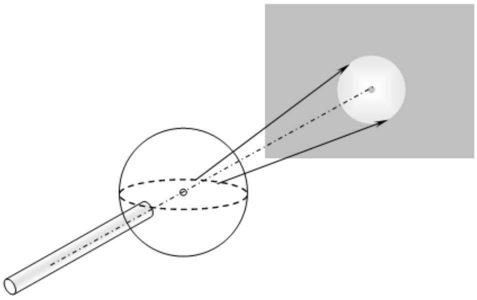
При попадании на поверхность пузыря луч частично отражается (луч 1 на рисунке), при этом направление его распространения отклоняется на угол θ_1 от первоначального направления.

Также падающий луч преломляется на поверхности пузыря, проходит внутри пузыря (отрезок AB) и выходит из него, образуя луч 2. Обозначим угол отклонения этого луча θ_2.

1.1 Найдите зависимости углов отклонения лучей θ_1 и θ_2 от угла падения φ.
1.2 Укажите, в каких пределах изменяются эти углы (приведите их численные значения).
1.3 Укажите диапазон изменения угла θ_1, при котором интенсивность отраженного принимает максимальное значение.

Часть 2. Узкий пучок.

На пузырек радиуса $R = 10\,мм$ падает узкий цилиндрический пучок света. Ось падающего пучка света проходит через центр пузырька, радиус пучка света $r = 1{,}0\,мм$. На расстоянии $l = 5{,}0\,см$ от задней стороны пузырька перпендикулярно падающему свету расположен экран, на котором наблюдается круглое светлое пятно. Экран, так же как и пузырек находится в воде.



2.1 Рассчитайте радиус светлого пятна на экране.

Вариант 1.

Задача 1. Гонка преследования.

1. Для построения графика зависимости скорости от времени можно рассчитать длительности прохождения каждого участка с постоянной скоростью по очевидной формуле

$$\Delta t_k = \frac{\Delta S_k}{v_k}. \tag{1}$$

а затем рассчитать времена окончания прохождения участков по формуле

$$t_0 = 0, \quad t_k = t_{k-1} + \Delta t_k \tag{2}$$

Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1.

$x, м$	$v, м/с$	$t, с$
0		0
600	10	60
900	5	120
1200	10	150
1800	20	180
2400	10	240

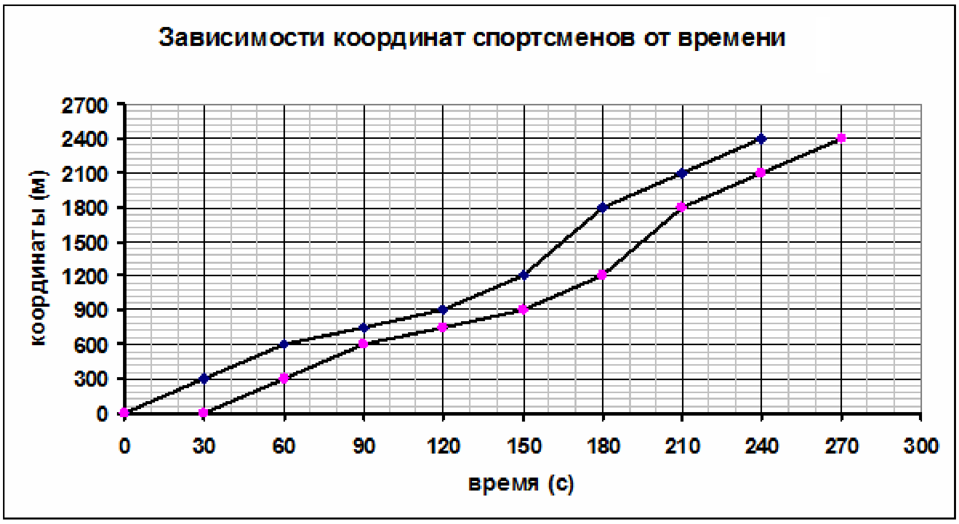
График этой зависимости показан на рисунке.

2-3. Все рассчитанные времена кратны 30 с, время между стартами спортсменов также равно 30 с. Поэтому имеет смысл дополнить таблицу 1 значениями скоростей и координат первого спортсмена через каждые 30 с. Значения координат в промежуточных точках, не вошедших в Таблицу 1, рассчитываются элементарно по закону равномерного движения. Для второго спортсмена значения скоростей и координат необходимо сместить на 1 строчку вниз (т.е. на 30 с). Наконец, по найденным значениям координат обоих спортсменов рассчитывается расстояние между ними Δx. Результаты этих расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 2.

t, c	$v_1, м/c$	$v_2, м/c$	$x_1, м$	$x_2, м$	$\Delta x, м$
0	0	0	0	0	0
30	10	0	300	0	300
60	10	10	600	300	300
90	5	10	750	600	150
120	5	5	900	750	150
150	10	5	1200	900	300
180	20	10	1800	1200	600
210	10	20	2100	1800	300
240	10	10	2400	2100	300
270		10		2400	

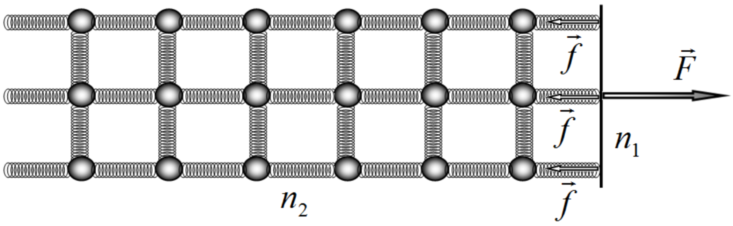
Графики зависимостей координат спортсменов от времени и расстояния между ними от времени приведены на рисунках ниже.



4. Максимальное расстояние между спортсменами 600 м было в момент времени $t = 180\ c$. В этот момент первый спортсмен находился на расстоянии 1800 м, второй на расстоянии 1200 м от точки старта.

Задача 2. Воздушный шарик.

Часть 1. Резиновая полоска.



1.1 Рассматриваемая полоска имеет

$$n_1 = \frac{h}{a} \tag{1}$$

пружинок по ширине полоски и

$$n_2 = \frac{l}{a} \tag{2}$$

по ее длине.

Если к полоске приложить постоянную силу $\vec{F}$, то она будет уравновешена силами упругости n_1 пружинок:

$$F = n_1 f = \frac{h}{a}\gamma x, \tag{3}$$

Где $f = \gamma x$ - сила упругости одной пружинки, x - ее удлинение. Силы упругости всех «продольных» пружинок будут одинаковы, т.к. они соединены последовательно, поэтому и их удлинения также будут одинаковы. Общее удлинение полоски равно

$$\Delta l = n_2 x = \frac{l}{a} x. \tag{4}$$

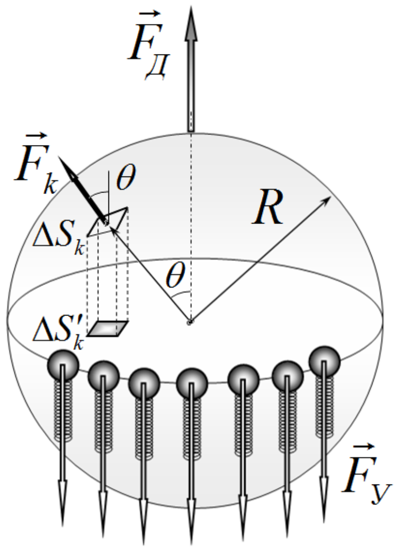
Выразим из последнего выражения $x = \frac{a}{l}\Delta l$ и подставим в формулу (3):

$$F = \frac{h}{a}\gamma x = \frac{h}{a}\gamma\frac{a}{l}\Delta l = \gamma\frac{h}{l}\Delta l, \tag{5}$$

Из этого выражения следует, что коэффициент жесткости полоски равен

$$k = \gamma\frac{h}{l}. \tag{6}$$

Часть 2. Воздушный шарик.



2.1 Для расчета зависимости давления внутри шара от его радиуса рассмотрим условия равновесия верхней половины сферической оболочки. Силу давления газа уравновешивают силы упругости пружинок, расположенные по диаметру выбранной части сферической оболочки. Число этих пружинок определяется длиной «экватора» в недеформированном состоянии

$$n = \frac{2\pi R_0}{a} \tag{7}$$

Растяжение оболочки шара является изотропным, поэтому растяжения всех пружинок оболочки одинаковы. Удлинение каждой пружинки можно выразить через радиусы шара в растянутом и не деформированном состояниях:

$$n(a+x) = 2\pi R \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi R_0}{a}(a+x) = 2\pi R \quad \Rightarrow \quad x = a\left(\frac{R}{R_0} - 1\right). \tag{8}$$

Тогда суммарная силы упругости, действующая на полусферу равна

$$F_У = n\gamma x = \frac{2\pi R_0}{a}\gamma a\left(\frac{R}{R_0} - 1\right) = 2\pi\gamma(R - R_0). \tag{9}$$

Суммарная сила давления газа на верхнюю половину оболочки направлена вертикально (на рисунке). Для расчета этой силы выделим на поверхности шара малую площадку площади ΔS. Сила давления газа на эту площадку направлена перпендикулярно площадке. Проекция этой силы на вертикальное направление равна

$$F_z = \Delta P \cdot \Delta S \cos\theta \ . \tag{10}$$

Здесь $\Delta P = P - P_0$ разность давления воздуха внутри шара и снаружи от него (т.е. атмосферное давление). Но $\Delta S \cos\theta = \Delta S'$ - площадь проекции площадки на плоскость «экватора». Суммарная сила давления находится посредством суммирования выражений (10) по всей полусфере и оказывается равным

$$F_Д = \sum_k \Delta P \cdot \Delta S_k \cos\theta_k = \Delta P \sum_k \Delta S'_k = \pi R^2 \Delta P \ . \tag{11}$$

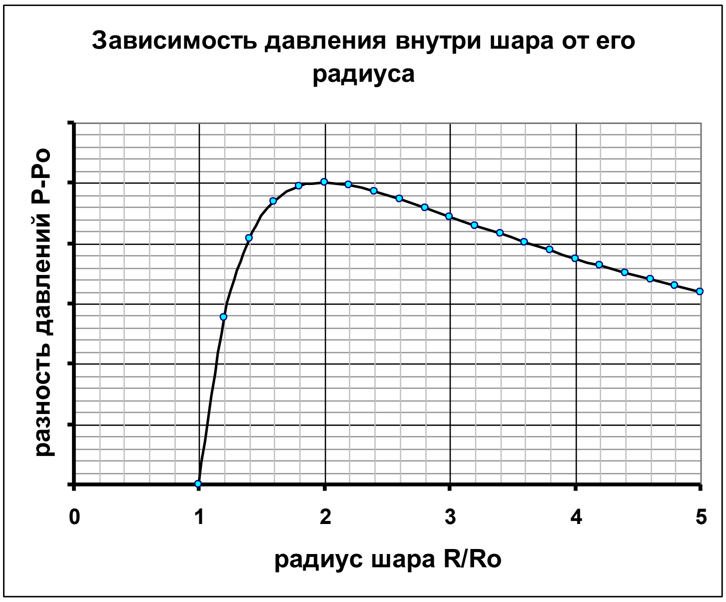
Этот же результат можно получить, если рассмотреть условие равновесия полусферы, закрытой снизу плоской пластинкой, проходящей через центр сферы.

В этом выражение сумма проекций площадей все площадок сферы равна площади большого круга шарика. Приравнивая эти силу давления и силу упругости,

$$2\pi\gamma\left(R - R_0\right) = \pi R^2 \Delta P \tag{12}$$

получим искомое соотношение между давлением воздуха внутри шара и его радиусом:

$$\Delta P = 2\gamma \frac{R - R_0}{R^2} \quad \Rightarrow \quad P = P_0 + 2\gamma \frac{R - R_0}{R^2} \tag{13}$$



Схематический график этой зависимости показан на рисунке.

2.2 Не сложно показать (с помощью производной, или с помощью численных расчетов), что найденная функция имеет максимум при

$$R = 2R_0 \tag{14}$$

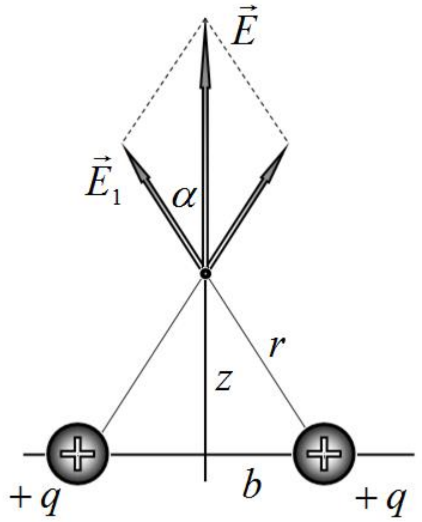
Тогда максимальное значение давления внутри шара равно

$$P_{max} = P_0 + 2\gamma \frac{2R_0 - R_0}{\left(2R_0\right)^2} = P_0 + \frac{\gamma}{2R_0} \ . \tag{15}$$

Задача 3. Электростатическая левитация.

Часть 1. Напряженность поля, создаваемого зарядами на плоскости.

1.1 Из симметрии задачи следует, что вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ на стержне будет направлен вертикально. Поэтому запишем выражение для вертикальной проекции вектора напряженности $\vec{E}_1$ поля, создаваемого одним заряженным шариком:



$$E_{1z} = E_1 \cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{z}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(b^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (1)$$

Так поле создается четырмя шариками, то проекция вектора напряженности сумарного поля будет равна

$$E_z = 4E_{1z} = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 b^2}\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2)$$

1.2 Таким образом постоянная в формуле (1) равна

$$E_0 = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 b^2}. \qquad (3)$$

А функция, входящая в это выражение

$$f(\xi) = \frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (4)$$

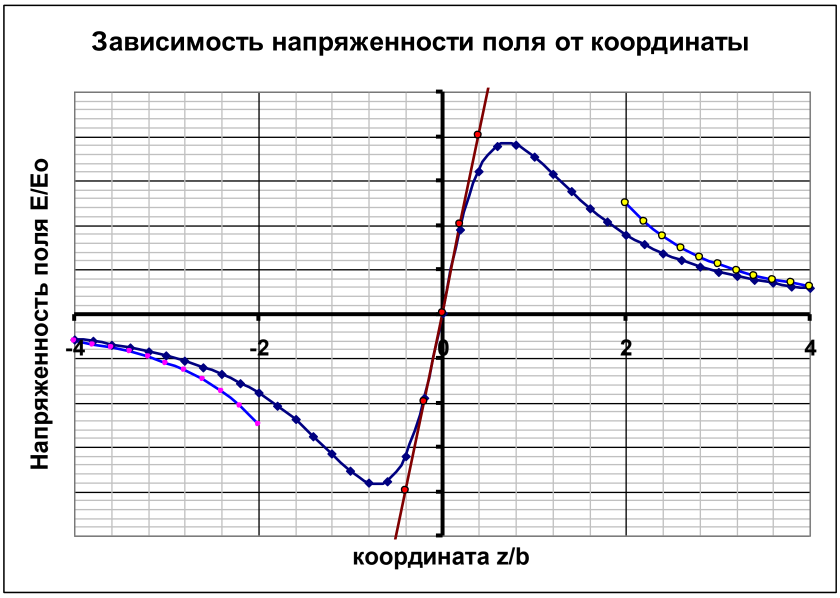
1.3 При малых значениях $\xi << 1$ можно пренебречь величиной ξ^2 в знаменателе, в этом случае приближенное выражаение для напряженности поля имеет вид

$$E = E_0\xi. \qquad (5)$$

Прибольших значениях $\xi >> 1$ в знаменателе можно пренебречь единицей, тогда напряженность поля приближенно описывается формулой

$$E = \frac{E_0}{\xi^2}. \qquad (6)$$

1.4 Схематический график искомой зависимости показан на рисунке. На этом же рисунке показаны графики приближенных функция, описывающих данную зависимость в предельных случаях.



Часть 2. Зависание.

2.1 Чтобы шарик мог находиться в состоянии равновесия на стержне, необходимо выполнения условия равенства сил

$$mg = q_0 E_0 f(\xi). \tag{7}$$

Из этого условия следует уравнение для определения возможных положений равновесия

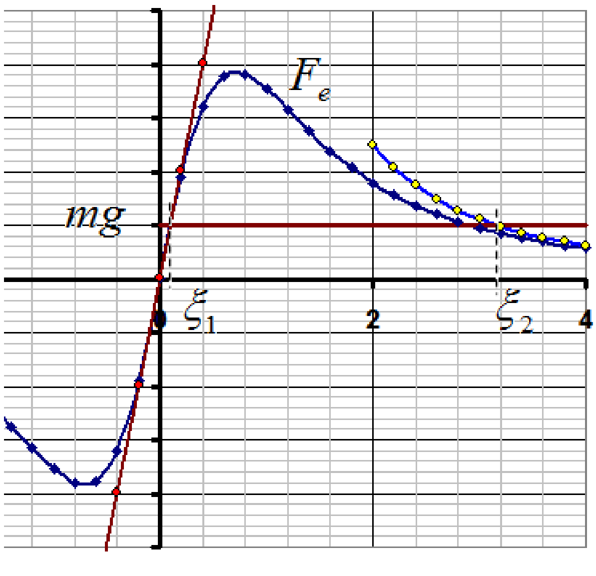
$$f(\xi) = \frac{mg}{q_0 E_0} = \eta. \tag{8}$$

Или в явном виде

$$\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \eta. \tag{9}$$

Решить это уравнение в явном виде затруднительно, поэтому проведем сначала графический анализ возможных решений.

Сначала рассмотрим случай, когда заряд подвижного шарика положительный. На рисунке показан примерный график зависимости электрической силы F_e от растояния, на который нанесена горизонтальная прямая, отмечающая значение силы тяжести подвижного шарика. Как следует из этого рисунка существует два корня уравнения (9). Традиционным способом не сложно показать, что меньший корень описывает положение равновесия. Большему корню соответстсвует положение устойчивого равновесия. Тем самым шарик сможет «зависнуть» именно в этом положении.



Теперь можно воспользоватьсся тем, что заданный параметр η мал. Поэтому можно воспользоваться приближением (6), для функции, описывающей электрическую силу. В этом случае уравнение (9) преобразуется к виду

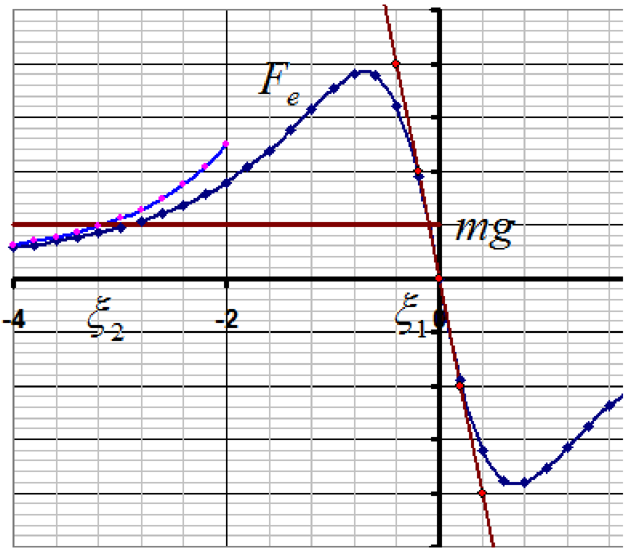
$$\frac{1}{\xi^2} = \eta. \tag{10}$$

Из которого находим

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \approx 4{,}5. \qquad (11)$$

При отрицательном заряде шарика уравнеине (9) имеет вид

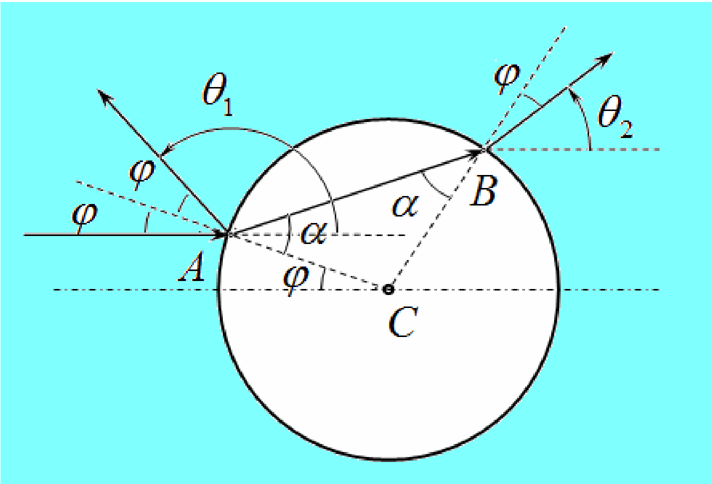
$$-\frac{\xi}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \eta. \qquad (12)$$



Графическая иллюстрация этого уравнения показана на рисунке. Анализ устойчивости в этом случае показывает, что устойчивым положением равновесия является меньший по модулю корень. В этой области можно воспользоваться приближением (5). Следовательно, при отрицательном заряде шарика он может «зависнуть» в точке с координатой

$$\xi = -\eta = -0{,}050. \qquad (13)$$

Задача 4. Пузырек в воде.



1.1 На рисунке показан ход луча через воздушный пузырек. Угол падения (угол между падающим лучом и нормалью к поверхности) равен φ. В соответствии с законом отражения света угол отражения также равен φ. Тогда, как следует из рисунка, при отражении луч отклоняется на угол

$$\theta_1 = \pi - 2\varphi\ . \qquad (1)$$

Обозначим угол преломления (угол между нормалью и преломленным лучом) α. По закону преломления света этот угол удовлетворяет уравнению

$$n \sin\varphi = \sin\alpha\ . \qquad (2)$$

Откуда следует, что

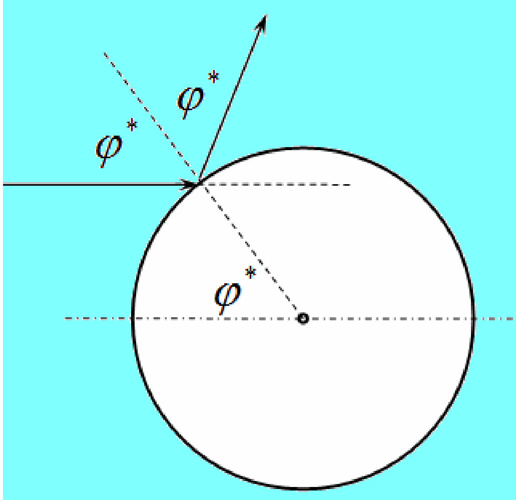
$$\alpha = \arcsin(n \sin\varphi) \qquad (3)$$

Угол преломления при выходе из пузырька равен φ, поэтому угол отклонения луча после прохождения через пузырек равен

$$\theta_2 = \pi - (\pi - 2\alpha) - \varphi - \varphi = 2(\alpha - \varphi) = 2(\arcsin(n\sin\varphi) - \varphi). \qquad (4)$$

1.2 Следует отметить, что при падении луча света на пузырек возможно полное отражение от поверхности пузырька. В предельном случае угол преломления равен $\alpha = \frac{\pi}{2}$. При этом угол падения равен

$$\varphi^* = \arcsin\frac{1}{n} = 0{,}85 \approx 49° \qquad (5)$$



Заметим, что в этом предельном случае луч отраженный 1 и луч 2, «прошедший» через каплю совпадают.
Отражение света происходит при любом угле падения, поэтому при изменении угла падения от 0° до 90° угол θ_1 изменяется от 180° до 0°:

$$\theta_1 \in [180°, 0°]. \qquad (6)$$

Луч проходит через пузырек, только при угле падения меньшем предельного угла $\varphi \le \varphi^*$. При этом угол отклонения этого луча изменяется от 0° до предельного значения

$$\theta_{2\max} = \pi - 2\varphi^* = 1{,}44 \approx 82{,}5° \ . \qquad (7)$$

Таким образом,

$$\theta_2 \in [0°, 82{,}5°]. \qquad (8)$$

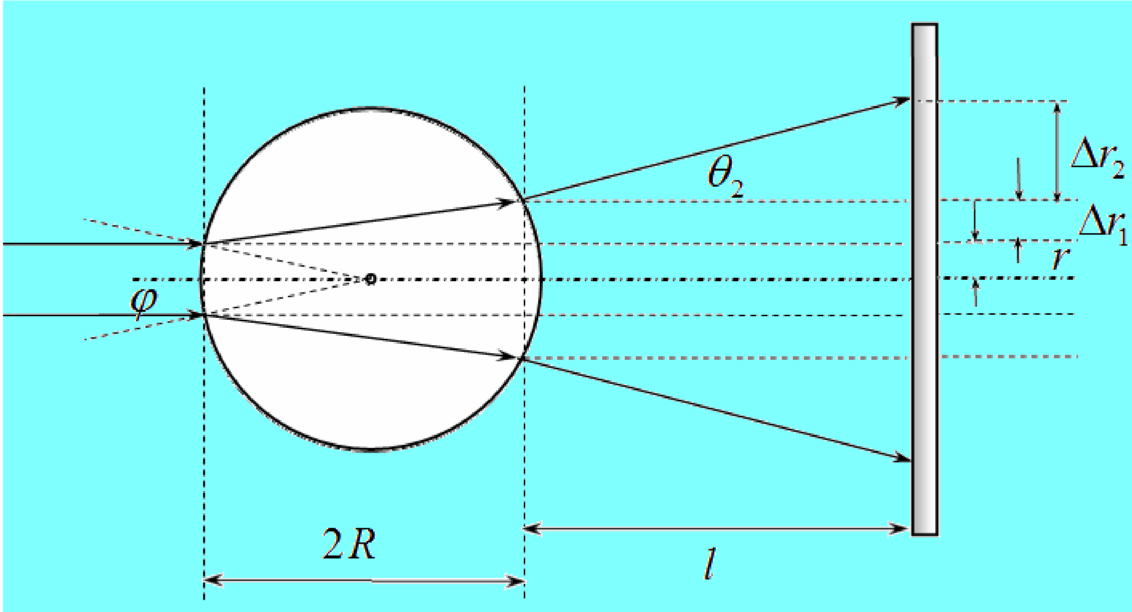
1.3 Интенсивность отраженного света будет максимальной при полном отражении, т.е. при $\varphi \ge \varphi^*$. В этом случае угол отклонения этого луча изменяется в пределах

$$\theta_1 \in [82{,}5°, 0°]. \qquad (9)$$

Заметим, что именно в этом диапазоне можно наблюдать яркие сверкающие блики на поверхности пузырьков.

Часть 2. Узкий пучок.

2.1. На рисунке показан ход крайних лучей через пузырек.



Так радиус пучка мал по сравнению с радиусом пузырька $r << R$, все углы можно считать малыми и использовать известные приближенные формулы для тригонометрических функций (углы измеряются в радианах):

$$\sin\beta \approx tg\beta \approx \beta; \quad \cos\beta \approx 1.$$

Тогда:

Угол падения:

$$\varphi \approx \frac{r}{R}; \tag{10}$$

Угол преломления:

$$\alpha \approx n\varphi = n\frac{r}{R}; \tag{11}$$

Смещение луча внутри пузырька:

$$\Delta r_1 \approx 2R(\alpha - \varphi) = 2R(n-1)\frac{r}{R} = 2r(n-1); \tag{12}$$

Угол отклонения луча

$$\theta_2 = 2(\alpha - \varphi) = 2\left(\arcsin(n \sin\varphi) - \varphi\right) \approx 2(n-1)\frac{r}{R}; \tag{13}$$

Смещение луча на пути от пузырька до экрана:

$$\Delta r_2 \approx l\theta_2 \approx 2l(n-1)\frac{r}{R}. \tag{14}$$

Окончательно получаем, что радиус пятна на экране равен:

$$r_1 = r + \Delta r_1 + \Delta r_2 = r + 2r(n-1) + l(n-1)\frac{r}{R} = r\left(2n + 1 + 2(n-1)\frac{l}{R}\right) \approx 7{,}0\,мм. \tag{15}$$