

Задача 1. Скатывание шара

Для решения задачи необходимо рассмотреть поступательное и вращательное движения шара.

Мгновенная ось вращения шара проходит через точки его касания с боковыми стенками желоба и находится на расстоянии r от центра шара (с учетом того, что $h = R$):

$$r = R \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} R \quad (1)$$

Здесь учтено, что $h = R$, поэтому $\varphi = 60^\circ$.

На шар действуют следующие силы:

- сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально;
- две равные по модулю силы нормальной реакции, направленные перпендикулярно боковым стенкам желоба;
- две силы трения, направленные вдоль боковых стенок желоба.

Следует учесть, что шар может катиться без проскальзывания, или с проскальзыванием.

Для различения этих двух вариантов движения, следует учесть, что максимальная сила трения покоя (при качении без проскальзывания) определяется законом Кулона – Амонтона:

$$F_{mp} \leq \mu N. \quad (2)$$

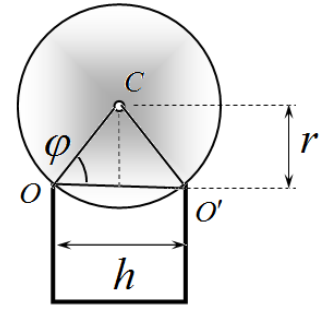


Рис. 1

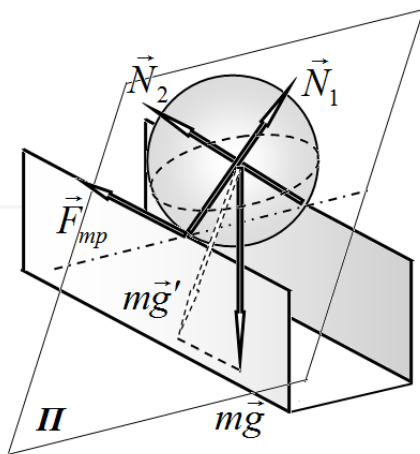


Рис. 2а

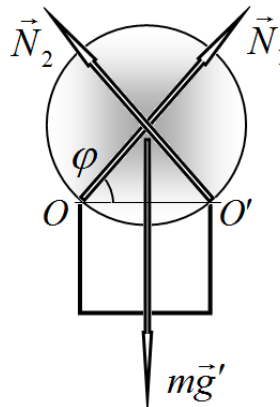


Рис. 2б

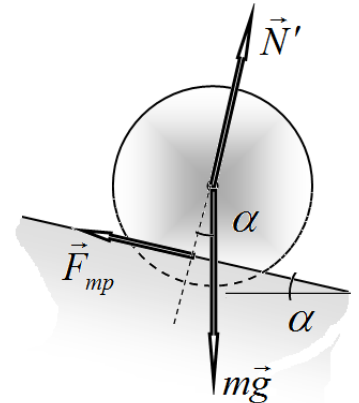


Рис. 2в

Рассчитаем значения равных модулей сил нормальной реакции $|\vec{N}_1| = |\vec{N}_2| = N$. Векторы этих сил лежат в плоскости, проходящей через ось вращения и центр шара (см. рис. 2а и 2б: \vec{g}' - проекция вектора ускорения свободного падения на эту плоскость). Из второго закона Ньютона следует, что

$$2N \sin \varphi = mg \cos \alpha \quad (3)$$

Откуда следует, что

$$N = \frac{mg \cos \alpha}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$

Запишем теперь уравнение динамики поступательного движения (уравнение 2 закона Ньютона в проекции на наклонный желоб):

$$ma = mg \sin \alpha - 2F_{mp} \quad (5)$$

И уравнение динамики вращательного движения относительно мгновенной оси вращения

$$I\beta = mgR \sin \alpha \quad (6)$$

здесь

$$I = \frac{2}{5}mR^2 + mr^2 = \frac{2}{5}mR^2 + \frac{3}{4}mR^2 = \frac{23}{20}mR^2 \quad (7)$$

момент инерции шара относительно мгновенной оси вращения.

Из уравнения (6) следует, что угловое ускорение шара равно

$$\beta = \frac{20}{23} \frac{g}{R} \sin \alpha. \quad (8)$$

При движении без проскальзывания линейное ускорение центра шара связано с его угловым ускорением соотношением

$$a = \beta r. \quad (9)$$

И равно

$$a = r\beta = \frac{10\sqrt{3}}{23} g \sin \alpha \quad (10)$$

Теперь из уравнения (5) выразим значение силы трения при движении без проскальзывания

$$F_{mp} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{10\sqrt{3}}{23} \right) mg \sin \alpha. \quad (11)$$

Наконец, из закона (2) найдем условие, при котором шар будет катиться без проскальзывания:

$$F_{mp} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{10\sqrt{3}}{23} \right) mg \sin \alpha < \mu \frac{mg \cos \alpha}{\sqrt{3}}. \quad (12)$$

или

$$\mu > \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{10\sqrt{3}}{23} \right) \operatorname{tg} \alpha \approx 0,35 \operatorname{tg} \alpha. \quad (13)$$

В противном случае (движение с проскальзыванием) не будет выполняться связь между линейным и угловым ускорениями $a \neq r\beta$. Но тогда известно значение силы трения:

$$F_{mp} = \mu N = \mu \frac{mg \cos \alpha}{\sqrt{3}}. \quad (14)$$

В этом случае ускорение центра шара можно найти из уравнения (5):

$$a = g \sin \alpha - \frac{2}{\sqrt{3}} \mu g \cos \alpha. \quad (15)$$

Задача 2. Теорема о средних и второе начало термодинамики.

Имеется два одинаковых бруска, первый изначально находится при температуре T_{10} , второй при температуре T_{20} .

2.1 Очевидно, что при непосредственном тепловом контакте установившаяся температура будет равна среднему арифметическому начальных температур:

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{2}(T_{10} + T_{20}) \quad (1)$$

2.2 Так как по условию машина работает по циклу Карно (с двумя изотермами), то это возможно только в том случае, когда за один цикл температуры нагревателя и холодильника изменяются на бесконечно малые величины. В процессе работы тепловой машины температуры холодильника и нагревателя будут непрерывно изменяться. Так как машина работает по обратимому циклу Карно, то выполняется соотношение:

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} = \frac{\delta Q_2}{T_2} \quad (2)$$

Где δQ_1 , δQ_2 - количества теплоты отданное нагревателем и переданное холодильнику за один цикл, соответственно. Изменения температур нагревателя и холодильника описываются уравнениями теплового баланса:

$$\begin{aligned} -CdT_1 &= \delta Q_1 \\ CdT_2 &= \delta Q_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Где C - теплоемкости брусков. Из выражений (2)-(3) следует уравнение:

$$\frac{dT_1}{T_1} = -\frac{dT_2}{T_2} \quad (4)$$

Интегрируя это уравнение с учетом начальных и конечного условия ($T_1 = T_2 = \bar{T}$), получим

$$\int_{T_{10}}^{\bar{T}} \frac{dT_1}{T_1} = -\int_{T_{20}}^{\bar{T}} \frac{dT_2}{T_2} \Rightarrow \ln \frac{\bar{T}}{T_{10}} = -\ln \frac{\bar{T}}{T_{20}} \quad (5)$$

Из этого выражения следует, что конечная температура равна среднему геометрическому начальных температур:

$$\bar{T} = \sqrt{T_{01}T_{02}} \quad (6)$$

2.3 Внутренняя энергия брусков пропорциональна абсолютной температуре. Если в первом случае внутренняя энергия сохраняется, то во втором она оказывается меньше исходной энергии, так как часть начальной энергии расходуется на совершение работы. Поэтому установившаяся температура во втором случае должна быть меньше. Отсюда следует, что среднее геометрическое меньше среднего арифметического.

Задача 3. Электростатическая пушка

Часть 1. Поле кольца

1.1 Потенциал поля элементарно определяется с помощью принципа суперпозиции (см. рис. 1)

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}}. \quad (1)$$

Максимальное значение потенциала – в центре кольца. Его значение

$$\varphi_{\max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2)$$

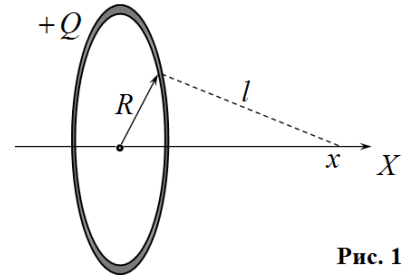


Рис. 1

Для построения графика данную зависимость удобно представить в «нормированной форме»

$$\frac{\varphi}{\varphi_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2}}. \quad (3)$$

1.2 Проекцию напряженности электрического поля проще всего найти как производную от потенциала (1):

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4)$$

Для определения экстремумов данной функции, вычислим ее производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2 - 2x^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} = 0. \quad (5)$$

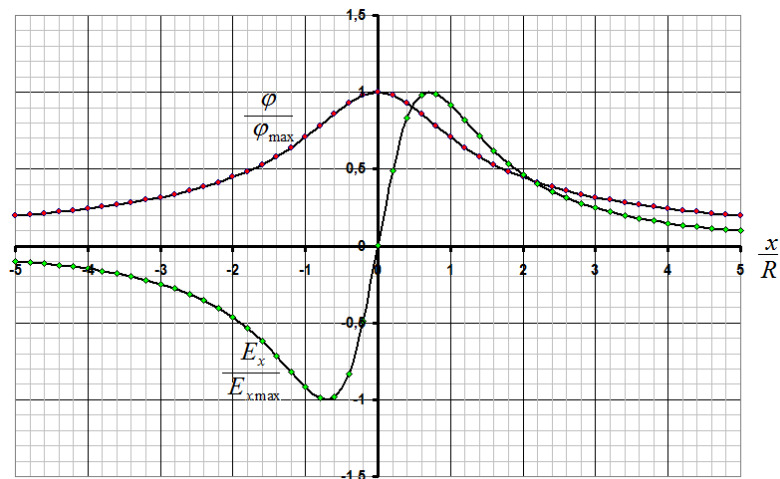
Из этого выражения следует, что экстремумы этой функции достигаются при

$$x^* = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

Модуль максимального значения напряженности электрического поля равен:

$$E_{x\max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{R^2}{2} + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2} \quad (7)$$

Нормированные графики найденных зависимостей потенциала и проекции вектора напряженности показаны на рисунке.



Часть 2. Заряженный снаряд.

2.1 Для определения скорости снаряда можно воспользоваться законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = q\varphi. \quad (8)$$

Из которого следует, что скорость заряженного шарика равна

$$v = \sqrt{2\frac{q\varphi}{m}} \quad (9)$$

Из этой формулы следует, что скорость максимальна в точке максимального потенциала, то есть в центре кольца. Следовательно, кольцо необходимо заземлить, когда шарик достигает центра кольца, в этом случае скорость снаряда будет равна

$$v_{\max} = \sqrt{2\frac{q\varphi_{\max}}{m}} = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\epsilon_0 Rm}}. \quad (10)$$

Часть 3. Незаряженный снаряд.

3.1 Не сложно показать, что сила, действующая на электрический диполь равна

$$F = p \frac{dE_x}{dx} = 4\pi\epsilon_0 r^3 E_x \frac{dE_x}{dx}. \quad (11)$$

Кинетическую энергию шарика можно рассчитать, как работу совершенную этой силой

$$\frac{mv^2}{2} = \int_{-\infty}^x F dx = \int_{-\infty}^x 4\pi\epsilon_0 r^3 E_x \frac{dE_x}{dx} dx = 4\pi\epsilon_0 r^3 \frac{E_x^2}{2}. \quad (12)$$

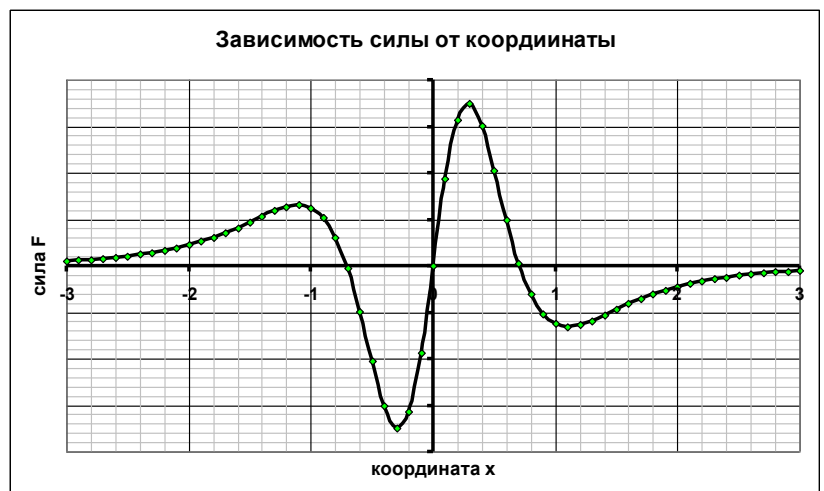
Из этого выражения следует, скорость шарика максимальна в тех точках, где максимальна напряженность электрического поля, т.е. при $x^* = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$. Скорость снаряда в этих точках равна

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{3\epsilon_0}{\rho}} |E_{x\max}| = \frac{Q}{6\pi R^2 \sqrt{\rho\epsilon_0}}. \quad (13)$$

Поэтому кольцо необходимо заземлять, когда снаряд находится в точках максимальной напряженности.

Для наглядности на следующем рисунке приведен график зависимости силы, действующей на шарик, от его координаты.

Построение этого графика от участников не требуется.



Задача 4. Электромагнитная вертушка

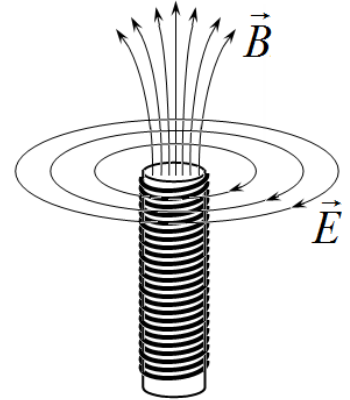
При подключении пластин к источнику они заряжаются до поверхностной плотности заряда, которая может быть найдена из соотношения

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} h = U_0 \Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon_0 U_0}{h} \quad (1)$$

Здесь $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_0$ - напряженность электростатического поля между пластинами.

При замыкании цепи катушки переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, напряженность которого можно найти, используя закон Фарадея. Применяя этот закон к круговому контуру радиуса r с центром на оси катушки, получим

$$2\pi r E = \frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2)$$



где $\Phi = \pi a^2 B$ - магнитный поток через торец катушки.

Это электрическое поле приводит к появлению момента силы, действующего на диск. Выделим на диске тонкое кольцо радиуса r и толщиной dr . Момент силы,

действующей на это кольцо со стороны вихревого электрического поля, равен

$$\begin{aligned} dM &= dF r = dq E r = \sigma dS E r = \\ &= 2\pi r dr \sigma \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt} r = r dr \sigma \frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя это выражение, получим суммарный момент силы, действующей на диск

$$M = \int_0^R r dr \frac{d\Phi}{dt} = \frac{R^2}{2} \sigma \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4)$$

Запишем уравнение динамики вращательного движения для диска для промежутка времени, в течение которого возникает магнитное поле. Так как этот промежуток мал, то можно пренебречь поворотом диска (и, следовательно, моментом сил упругости нити подвеса):

$$I \frac{d\omega}{dt} = M = \frac{R^2}{2} \sigma \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5)$$

Где $I = \frac{mR^2}{2}$ - момент инерции диска. Из этого уравнения следует, что диск приобретает угловую скорость, равную

$$\omega_0 = \frac{R^2 \sigma}{2I} \Phi_0. \quad (6)$$

Для расчета максимального угла поворота φ воспользуемся законом сохранения энергии

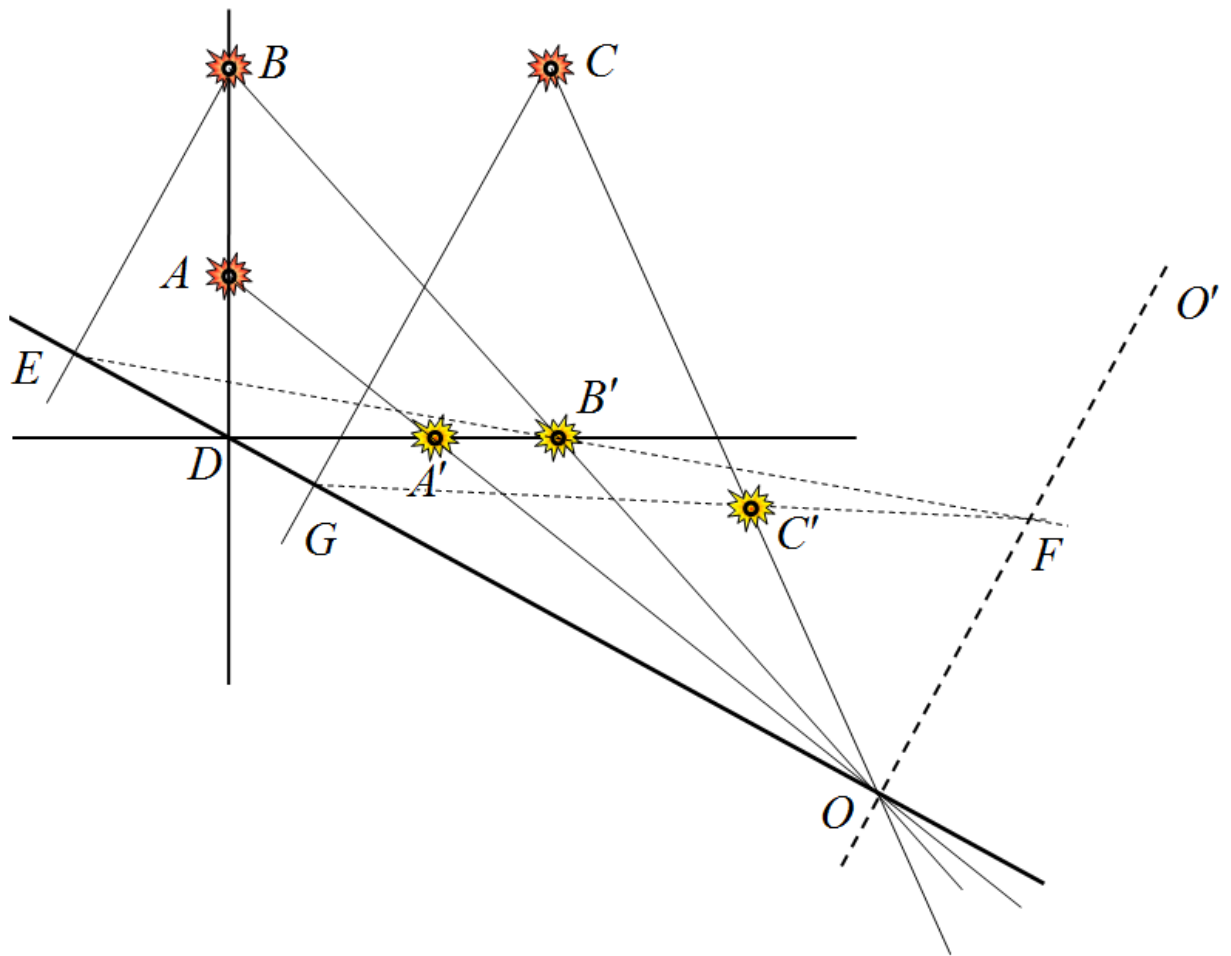
$$\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{\kappa\varphi^2}{2} \Rightarrow \varphi = \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \omega_0. \quad (7)$$

Подставляя все промежуточные значения параметров, окончательно получим

$$\varphi = \sqrt{\frac{mR^2}{2\kappa} \frac{R^2 \sigma}{2I}} \Phi_0 = \sqrt{\frac{mR^2}{2\kappa} \frac{\varepsilon_0 U_0}{mh}} \pi a^2 B_0. \quad (8)$$

Задача 5. А где же линза?

Для выполнения требуемых построений следует воспользоваться следующими рассуждениями: любой луч вышедший из точечного предмета, после преломления в линзе, проходит через изображение этой точки, (или продолжение этого луча)



Возможный вариант построений показан на рисунке. Если луч попадает в оптический центр линзы. Поэтому центр линзы лежит в точке пересечения прямых AA' и BB' - точка O . Если луч проходит через точки A и B , то после преломления в линзе он пройдет через точки A' и B' . Поэтому точка D пересечения прямых AB и $A'B'$ лежит в плоскости линзы.

Таким образом, плоскость линзы проходит через точки OD . Прямая OO' , проходящая через оптический центр линзы и перпендикулярная плоскости линзы, является главной оптической осью линзы.

Для нахождения фокуса линзы можно провести луч, например, из точки B до пересечения с плоскостью линзы в точке E , после чего провести прямую EB' до пересечения с главной оптической осью линзы: точка их пересечения и будет фокусом линзы F .

После того, как найдены основные элементы линзы, построение изображения точки C становится тривиальным: проводим луч CO , проходящий через оптический центр; проводим луч CG , параллельный оптической оси, после преломления его продолжение пройдет через фокус, Изображением точки C является точка пересечения лучей CO и GF - точка C' .

Из проведенных построений следует, что линза является рассеивающей, а изображения всех точек мнимые.