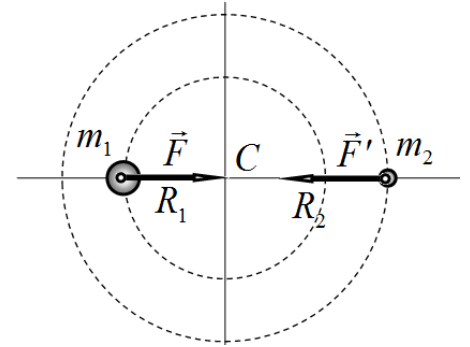


Решения задач.

Задача 1. Точки Лагранжа.

1. На основании 2 закона Ньютона и закона всемирного тяготения запишем уравнения, описывающие круговые движения обоих тел:

$$\begin{aligned} m_1 \omega^2 R_1 &= G \frac{m_1 m_2}{R^2} \\ m_2 \omega^2 R_2 &= G \frac{m_1 m_2}{R^2} \end{aligned} \quad (1)$$



Здесь ω - угловая скорость движения тел. Из этих уравнений следует, что радиусы орбит удовлетворяют условию

$$m_1 R_1 = m_2 R_2. \quad (2)$$

Это соотношение указывает, что центр окружностей является центром масс системы двух тел.

2. Сумма радиусов равна расстоянию между телами

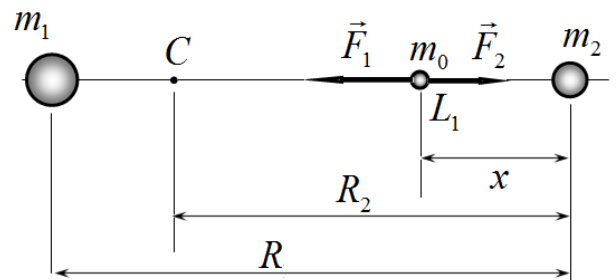
$$R_1 + R_2 = R. \quad (3)$$

Из уравнений (2)-(3) находим радиусы орбит:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} R \\ R_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} R \end{aligned} \quad (4)$$

3. Для тела массы m_0 , находящегося в точке Лагранжа L_1 , справедливо уравнение

$$m_0 \omega^2 (R_2 - x) = G \frac{m_0 m_1}{(R - x)^2} - G \frac{m_0 m_2}{x^2}. \quad (5)$$



Из уравнения (1) выразим значение угловой скорости

$$\omega^2 = G \frac{m_2}{R^2} \frac{1}{R_1} = G \frac{m_2}{R^2} \frac{m_1 + m_2}{m_2 R} = G \frac{m_1 + m_2}{R^3}$$

И подставим его в уравнение (5), также как выражение для R_2 :

$$G \frac{m_1 + m_2}{R^3} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} R - x \right) = G \frac{m_1}{(R-x)^2} - G \frac{m_2}{x^2} \Rightarrow$$

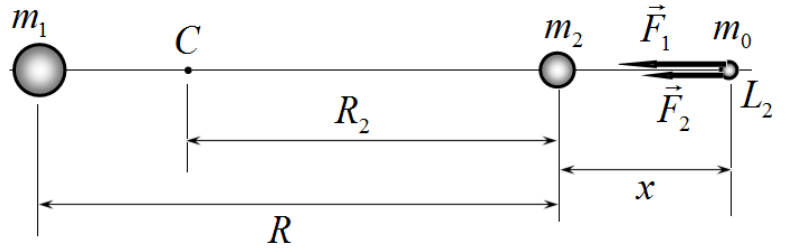
$$\frac{m_1 + m_2}{R^3} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} R - x \right) = \frac{m_1}{(R-x)^2} - \frac{m_2}{x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{m_1}{R^2} - \frac{m_1 + m_2}{R^3} x = \frac{m_1}{(R-x)^2} - \frac{m_2}{x^2}$$

Наконец, разделим уравнение на массу большего тела и введем отношение масс массивных тел $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, в результате получим уравнение для расчета значения расстояния от второго тела до первой точки Лагранжа:

$$\frac{1}{R^2} - \frac{1 + \mu}{R^3} x = \frac{1}{(R-x)^2} - \frac{\mu}{x^2} \quad (6)$$

Аналогично выводятся уравнения для второй точки Лагранжа. Сначала записываем уравнение второго закона Ньютона для тела массы m_0 :



$$m_0 \omega^2 (R_2 + x) = G \frac{m_0 m_1}{(R+x)^2} + G \frac{m_0 m_2}{x^2}. \quad (7)$$

После чего проводим такие же алгебраические преобразования, в результате получаем уравнение:

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1 + \mu}{R^3} x = \frac{1}{(R+x)^2} + \frac{\mu}{x^2} \quad (8)$$

4. Для доказательства положения точек Лагранжа L_4, L_5 запишем выражение для суммарной силы, действующей на тело малой массы m_0 , в векторной форме:

$$\vec{F} = G \frac{m_0 m_1}{R^3} \vec{r}_1 + G \frac{m_0 m_2}{R^3} \vec{r}_2 = G \frac{m_0}{R^3} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2). \quad (9)$$

Выражение в скобках выражается через радиус-вектор центра масс

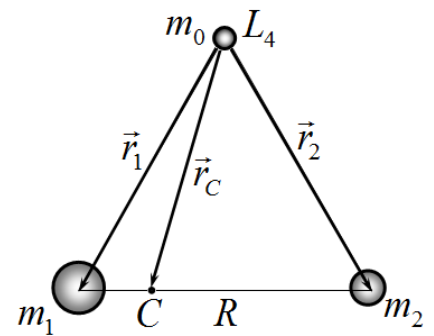
$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{r}_C \quad (10)$$

Тогда уравнение второго закона Ньютона для этого тела в проекции на направление вектора \vec{r}_C имеет вид:

$$m_0 \omega^2 r_C = G \frac{m_0}{R^3} (m_1 + m_2) r_C. \quad (11)$$

Из этого уравнения следует, что угловая скорость движения тела m_0 равна

$$\omega^2 = G \frac{m_1 + m_2}{R^3}, \quad (12)$$



Что совпадает с угловой скоростью вращения массивных тел. Поэтому положение тела m_0 будет оставаться неизменным относительно массивных тел. Следовательно, вершина равностороннего треугольника действительно является точкой Лагранжа.

5. Очевидно, что масса спутника значительно меньше массы Земли, поэтому его положение совпадает с точкой Лагранжа L_1 . Поэтому для расчета расстояния до Земли следует решить уравнение (6). Точное решение этого уравнения затруднительно. Однако, масса Земли значительно меньше массы Солнца $\mu = 3,0 \cdot 10^{-6} \ll 1$, поэтому расстояние до Земли значительно меньше радиуса Земной орбиты $x \ll R$ (который практически равен расстоянию от центра Земли до центра Солнца). В этом случае можно решить данное уравнение приближенно (но с высокой точностью), для чего следует провести следующее разложение:

$$\frac{1}{(R-x)^2} \approx \frac{1}{R^2} + \frac{2}{R^3}x \quad (13)$$

В этом приближении уравнение (6) легко разрешимо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} - \frac{1+\mu}{R^3}x &= \frac{1}{R^2} + \frac{2}{R^3}x - \frac{\mu}{x^2} \Rightarrow \\ \frac{3+\mu}{R^3}x &= \frac{\mu}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}R \end{aligned} \quad (14)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}R = 1,5 \cdot 10^6 \text{ км}. \quad (15)$$

Заметим, что это расстояние равно одной сотой от радиуса земной орбиты.

5. Простые рассуждения приводят к выводу, что космический телескоп находится в точке Лагранжа L_2 . Для расчета ее расстояния до земли следует решить уравнение (8). Что можно проделать по аналогичной приближенной методике:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} + \frac{1+\mu}{R^3}x &= \frac{1}{(R+x)^2} + \frac{\mu}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{R^2} + \frac{1+\mu}{R^3}x = \frac{1}{R^2} - \frac{2}{R^3}x + \frac{\mu}{x^2} \Rightarrow \\ \frac{3+\mu}{R^3}x &= \frac{\mu}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}R \end{aligned} \quad (16)$$

И получить тот же численный результат:

$$x_2 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}R = 1,5 \cdot 10^6 \text{ км}. \quad (17)$$

6. Астероиды могут случайно попадать в точки Лагранжа и оставаться там. Поэтому центры указанных групп астероидов лежат вблизи точек Лагранжа L_4, L_5 .

7. Расстояние до от центра «греков» и «троянцев» до Юпитера равно радиусу орбиты Юпитера, который может быть рассчитан на основании третьего закона Кеплера:

$$\left(\frac{R_{Ю}}{R_3}\right)^3 = \left(\frac{T_{Ю}}{T_3}\right)^2 \Rightarrow R_{Ю} = R_3 \left(\frac{T_{Ю}}{T_3}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 7,9 \cdot 10^8 \text{ км}. \quad (18)$$

Задача 2. Демон Максвелла без... демона!

1. Число ударов молекул (в единицу времени о площадку единичной площади) определяется известной формулой

$$v = \frac{1}{4} n \langle v \rangle = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8 RT}{\pi M}}. \quad (1)$$

Используя эту формулу определим отношение концентраций во второй части сосуда (среди «перелетевших» молекул):

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}. \quad (2)$$

2. Распределение числа ударов о стенку является однородным. Поэтому можно рассматривать распределение молекул по проекциям скорости на ось x , перпендикулярную стенке с отверстием. Выделим в сосуде группу молекул, проекция скорости v_x которых лежит в интервале $[v_x, v_x + dv_x]$. Концентрация этих молекул равна $n\varphi(v_x)dv_x$ (n - общая концентрация молекул); за малый промежуток времени Δt до стенки долетят молекулы, находящиеся от нее на расстоянии меньшем, чем $v_x \Delta t$. Поэтому число молекул выделенной группы, попавших в отверстие равно

$$dN(v_x) = n\varphi(v_x)dv_x \cdot v_x \Delta t \cdot S \quad (3)$$

Эти молекулы перенесут в свободную часть сосуда энергию, равную

$$dE(v_x) = n\varphi(v_x)dv_x \cdot v_x \Delta t \cdot S \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (4)$$

Для расчета суммарной энергии молекул во второй части сосуда данное выражение следует проинтегрировать по всем положительным значениям v_x и провести усреднение по перпендикулярным проекциям скорости v_y, v_z :

$$\Delta E = nS\Delta t \frac{m}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT} \right) (v_x^3 + v_x (\langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle)) dv_x \quad (5)$$

Вычисление этого интеграла приводит к результату (с учетом известной формулы $\langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{kT}{m}$):

$$\Delta E = nS\Delta t \cdot \frac{m}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

Здесь мы использовали обозначение для изначальной температуры газа T_0 . Теперь рассчитаем среднюю энергию молекул во второй части сосуда. С одной стороны она равна

$$\langle E \rangle = \frac{\Delta E}{\Delta N} = \frac{nS\Delta t \cdot \frac{m}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8 RT}{\pi M}} \cdot S\Delta t} = 2kT_0. \quad (7)$$

А с другой, она может быть выражена через температуру во второй части сосуда

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (8)$$

Приравнявая эти выражения, находим, что установившаяся температура во второй части сосуда равна $T = \frac{4}{3} T_0$, или относительное изменение температуры составляет 33%.

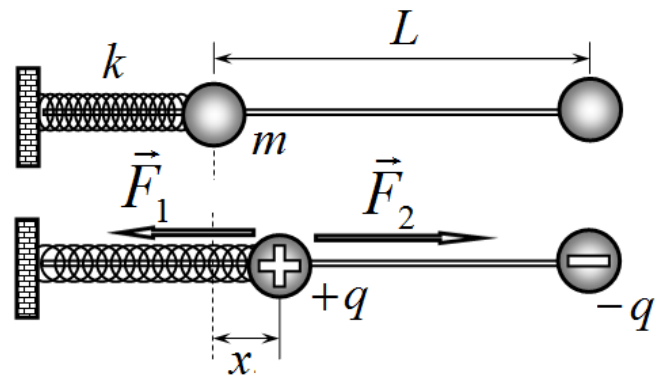
Задача 3. Кто кого?

1. При смещении шарика на расстояние x на него действуют сила упругости

$$F_1 = -kx \quad (1)$$

И сила кулоновского взаимодействия

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(L-x)^2} \quad (2)$$



Поэтому уравнение второго закона ньютона имеет вид

$$ma = -kx + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(L-x)^2} \quad (3)$$

Преобразуем выражение для суммарной силы:

$$F = -kx + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(L-x)^2} = -kL \left(\frac{x}{L} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^3 k} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2} \right) = -kL \left(z - \frac{\beta}{(1-z)^2} \right) \quad (4)$$

Здесь обозначено $z = \frac{x}{L}$ - относительное смещение шарика; $\beta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L^3 k}$ - заданный в условии безразмерный параметр. Смысл этого параметра: отношение кулоновской силы в начальном положении шарика к силе упругости при смещении шарика на величину L .

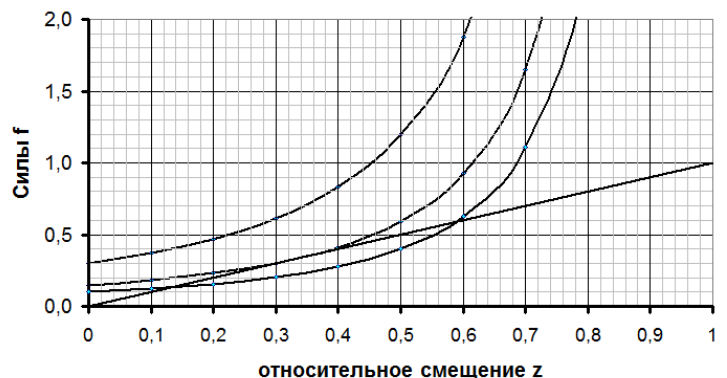
2. Для дальнейшего анализа удобно использовать именно эти единицы измерения (единица длины - начальное расстояние L , единица силы - kL). Тогда модули сил упругости и электрического притяжения задаются формулами

$$f_1 = z, \quad f_2 = \frac{\beta}{(1-z)^2} \quad (4)$$

Графики этих функций при нескольких значениях параметра β показаны на рисунке. Важно отметить, что при малых значениях β имеется две точки пересечения, т.е. два положения равновесия. При больших значениях β точек пересечения нет, в этом случае сила электрического притяжения превышает силу упругости в любом положении шарика, который обязательно притянется ко второму неподвижному шарiku.

Критическим значением параметра β является случай, когда график зависимости силы упругости является касательным к графику функции f_2 . Для нахождения этого критического

Зависимость сил от смещения шарика



значения запишем систему уравнений (в точке касания значения функций и значения их производных в точке касания совпадают):

$$\begin{cases} z = \frac{\beta}{(1-z)^2} \\ 1 = \frac{2\beta}{(1-z)^3} \end{cases} \quad (5)$$

Решением этой системы являются следующие значения:
Координата точки касания

$$z^* = \frac{1}{3}; \quad (6)$$

Критическое значение параметра

$$\beta^* = \frac{4}{27}. \quad (7)$$

3. Таким образом, устойчивое положение равновесия возможно при

$$\beta < \frac{4}{27}. \quad (8)$$

4. Максимальное возможное смещение шарика, при котором он может находиться в положении равновесия, равно

$$x_{\max} = z^* L = \frac{L}{3}. \quad (9)$$

5. Запишем еще раз уравнение второго закона Ньютона для подвижного шарика

$$m\ddot{x} = mL\ddot{z} = -kL\left(z - \frac{\beta}{(1-z)^2}\right) \quad (10)$$

При незаряженных шариках это уравнение описывает гармонические колебания с периодом

$$m\ddot{z} = -kz \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (11)$$

При заданном смещении положения равновесия параметр β принимает значение

$$z_0 = \frac{\beta}{(1-z_0)^2} \Rightarrow \beta = \eta(1-\eta)^2 = \frac{9}{64}. \quad (12)$$

Для определения периода малых колебаний разложим в ряд выражение для силы вблизи положения равновесия. Представим $z = \eta + \delta$, тогда

$$\begin{aligned} z - \frac{\beta}{(1-z)^2} &\approx \eta - \frac{\beta}{(1-\eta)^2} + \left(1 - \frac{2\beta}{(1-\eta)^3}\right)\delta = \eta - \frac{\eta(1-\eta)^2}{(1-\eta)^2} + \left(1 - \frac{2\eta(1-\eta)^2}{(1-\eta)^3}\right)\delta = \\ &= \left(1 - \frac{2\eta}{(1-\eta)}\right)\delta \end{aligned} \quad (13)$$

В этом случае уравнение движения преобразуется к виду:

$$m\ddot{\delta} = -k\left(1 - \frac{2\eta}{(1-\eta)}\right)\delta \quad (14)$$

Поэтому период малых колебаний оказывается равным

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k\left(1 - \frac{2\eta}{(1-\eta)}\right)}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{2\eta}{(1-\eta)}}} = T_0\sqrt{3} = 1,73T_0. \quad (15)$$

Таким образом, период колебаний увеличится на 73%.

6. При заданном значении смещения положения равновесия графики зависимости сил от координаты шарика имеют вид, показанный на следующем рисунке. Положению равновесия соответствует первая точка пересечения (здесь $z = \eta$), максимальное возможное смещение есть координата второй точки пересечения. Для ее определения следует решить уравнение

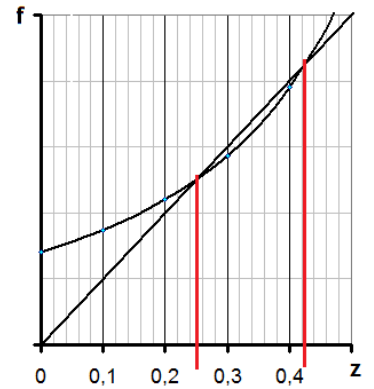
$$z = \frac{\beta}{(1-z)^2} \Rightarrow z(1-z)^2 - \beta = 0, \quad (15)$$

Которое является уравнением третьей степени (третий корень лежит за областью физически допустимых значений $z > 1$). Для точного решения этого уравнения можно воспользоваться одним известным корнем (заданным значением смещения положения равновесия). Преобразуем уравнение (15):

$$\begin{aligned} z(1-z)^2 - \beta &= z(1-z)^2 - \eta(1-\eta)^2 = z - 2z^2 + z^3 - (\eta - 2\eta^2 + \eta^3) = \\ &= (z - \eta) - 2(z^2 - \eta^2) + (z^3 - \eta^3) = (z - \eta)(1 - 2(z + \eta) + (z^2 + \eta z + \eta^2)) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

После сокращения на первую скобку получаем квадратное уравнение, интересующий нас корень которого равен $z_2 \approx 0,42$. Следовательно, максимально возможная амплитуда колебаний равна

$$A = (z_2 - z_1)L = 0,17L. \quad (17)$$



Задача 4. Позитроний.

Данная является достаточно известной. Для ее решения запишем уравнение второго закона Ньютона для одной из частиц (учитывая, что частицы движутся по окружности радиуса r вокруг центра масс):

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2r)^2}. \quad (1)$$

К этому уравнению добавим правило квантования Бора

$$2mvr = n\hbar. \quad (2)$$

Решая эту систему уравнений, находим возможные значения радиусов орбит и скоростей движения частиц:

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} n^2 = r_1 n^2 \\ v_n &= \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0\hbar} \frac{1}{n^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Где $r_1 = 0,52 \text{ \AA}$ - радиус орбиты в основном состоянии (при $n = 1$)

Возможные значения энергии атома позитрония определяются по формуле

$$E_n = 2 \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} = - \frac{me^4}{(8\pi\epsilon_0\hbar)^2} \frac{1}{n^2} = - \frac{1,1 \cdot 10^{-18}}{n^2} (\text{Дж}) = - \frac{6,9}{n^2} (\text{эВ}) \quad (4)$$

2. Энергия ионизации равна модулю энергии в основном состоянии

$$E = 6,9 \text{ эВ}. \quad (5)$$

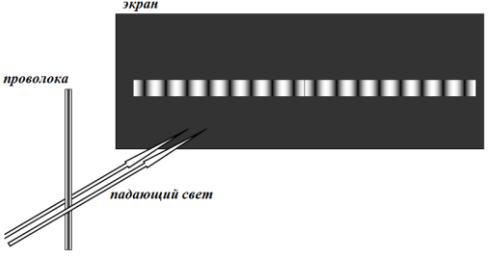
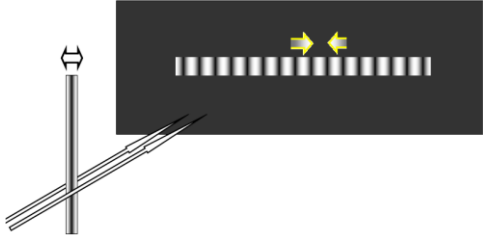
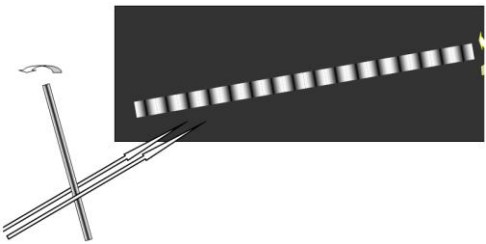
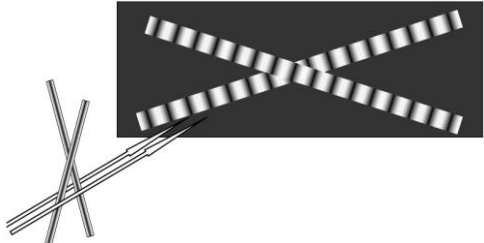
3. Максимальной длине волны поглощения соответствует энергия кванта равная разности энергий основного и первого возбужденного ($n = 2$) состояний, т.е.

$$\frac{hc}{\lambda} = E_2 - E_1 \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{4}{3} \frac{hc}{|E_1|} = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}. \quad (6)$$

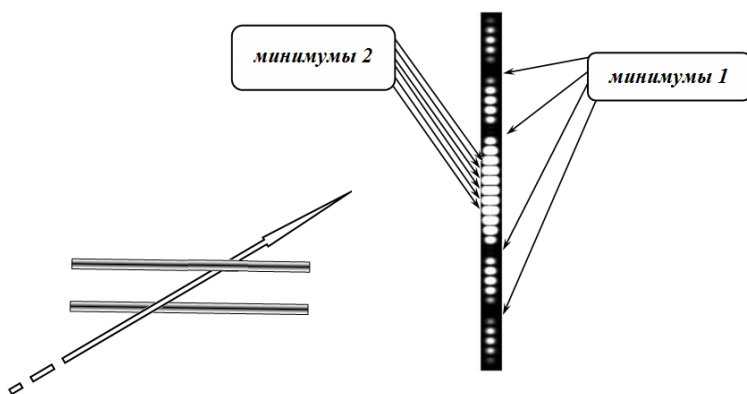
Задача 5. Как разгадали структуру ДНК?

Итак, основная идея – наблюдение крестообразной дифракционной картины со множеством максимумов и минимумов. Остается только чуть-чуть поразмыслить, что бы понять, как возникает эта картина. Для этого могут помочь основные законы дифракции:

«1) все поперек; 2) чем уже, тем шире». Теперь чуть подробнее и ближе к описываемому эксперименту по дифракции света на проволоке.

1	Проволока вертикальна – полоса дифракционных пятен горизонтальна!	
2	Проволока толще – расстояние между максимумами меньше	
3	Проволоку повернули – повернулась полоска дифракционных пятен. Но осталась перпендикулярной проволоке	
4	Две проволоки под углом – две полосы максимумов под тем же углом, опять перпендикулярно проволокам!	

Осталось понять «наложение» дифракционных полос при дифракции на двух параллельных проволоках – в этом случае полосы накладываются друг на друга, в результате более частая полоса модулируется более редкой. Густо расположенные минимумы (основная высокочастотная решетка) обусловлены интерференцией двух волн, идущих от проволок, расстояния между этими минимумами (подписаны как минимумы 2) обратно пропорционально



расстоянию между проволоками. Модуляция этой решетки обусловлена дифракцией на отдельной проволоке, расстояния между этими минимумами (Минимумы 1) обратно пропорционально толщине проволоки.

После того, как стала понятной структура дифракционной картины, возможно, станут понятны и приводимые результаты. Отметим также, что человеческий глаз положение минимумов определяет точнее, чем максимумов.

Для определения толщины проволоки a_1 , необходимо измерить координаты минимумов, обусловленных дифракцией на проволоке, по нашим обозначениям – «минимумов 1». Теоретически их положение определяется формулой

$$\sin \theta_m = \pm m \frac{\lambda}{a}, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

Углы отклонения θ_m являются малыми, поэтому при расчетах следует принять

$$\sin \theta_m \approx \theta_m = \frac{x_m}{D}, \quad (2)$$

где D - расстояние от объекта до экрана, x_m - координата минимума номер m на экране.

Тогда рассчитанное значение диаметра проволоки равно

$$a_1 = \frac{\lambda D}{\Delta x_1} = 0,151 \text{ мм}. \quad (3)$$

Для определения расстояния между витками d следует изучить расположение минимумов. Обусловленных интерференцией волн от двух проволок. Т.е. более густо расположенных «минимумов 2». Их положение определяется формулой

$$x_m = \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda D}{d} \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{\lambda D}{d}. \quad (4)$$

Тогда рассчитанное значение расстояния между витками оказывается равным:

$$d = \frac{\lambda D}{\Delta x_2} = 0,89 \text{ мм}. \quad (5)$$

Угол наклона витков спирали может быть найден как половина угла 2α между полосами крестообразной картины. По результатам измерений $\alpha = 10^\circ$.

Элементарное геометрическое рассмотрение, показывает, что шаг спирали рассчитывается

$$\text{по формуле } P = \frac{d_1}{\cos \alpha_1} = 0,91 \text{ мм}.$$

Тангенс наклона спирали выражается через шаг спирали и длину одного витка

$$\text{tg} \alpha_1 = \frac{P}{2\pi R}. \text{ Из этой формулы определяется}$$

$$\text{радиус спирали } R = \frac{P}{2\pi \text{tg} \alpha_1} = 0,75 \text{ мм}$$

