



Белорусский государственный университет  
Физический факультет  
«Абитуриент физического факультета - 2022»

Вариант 2



**Задача 1. Гонка преследования.**

Во время соревнований лыжников, как правило, указывают отставания одного спортсмена от другого в секундах, а не в метрах, например: «отстает на 10 секунд, а не на 100 метров».

Задумывались ли Вы, почему именно так? В данной модельной задаче Вам необходимо показать, что при постоянном временном запаздывании расстояние между спортсменами может изменяться в достаточно широких пределах.

На рисунке показан график зависимости скорости первого спортсмена от пройденного от точки старта пути. Считайте, что время старта этого спортсмена  $t = 0$ . В дальнейшем все времена отсчитывайте от момента старта первого спортсмена.



Второй спортсмен стартует через 30 секунд после первого. Он движется по дистанции с такой же зависимостью скорости от пройденного пути, как и первый.

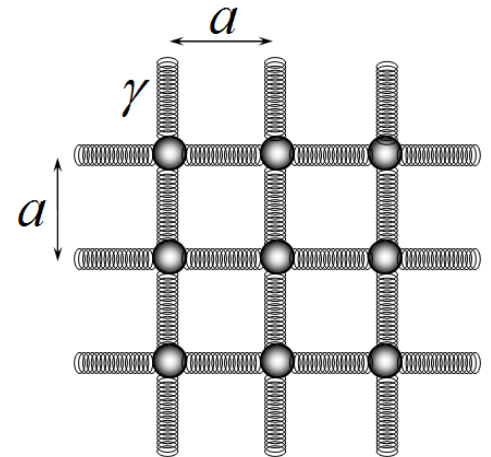
1. Постройте график зависимости скорости первого спортсмена от времени.
2. Постройте графики зависимостей координат (т.е. расстояния от точки старта) обоих спортсменов от времени.
3. Постройте график зависимости расстояния между первым и вторым спортсменом от времени.
4. Укажите, где находились спортсмены (т.е. на каких расстояниях от старта), когда расстояние между ними было максимально.



## Задача 2. Резиновая трубка.

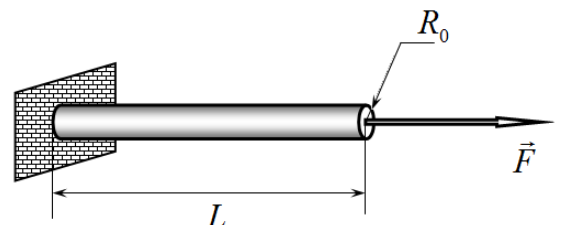
Механические свойства полимеров разнообразны и очень сложны. Поэтому для описания этих свойств использует различные модели. Одна из таких моделей рассматривается в данной задаче.

Микроструктура тонкой резиновой пленки представляет собой однослойную квадратную сетку, в узлах которой находятся небольшие шарики, соединенные между собой упругими пружинками. Диаметры шариков значительно меньше расстояния между шариками, которые равны длинам пружин  $a$  (при этом пружинки не деформированы). Жесткости пружин равны  $\gamma$ , т.е. при растяжении пружины на величину  $x$ , возникающая сила упругости равна  $f = \gamma x$ . Из описанной резины изготовили длинную трубку, длина которой в недеформированном состоянии  $L$  значительно больше ее радиуса  $R_0$ . Также считайте, что размер ячейки  $a$  значительно меньше размеров трубки.



### Часть 1. Растяжение трубки.

Для изучения упругих свойств пленки один конец трубки закрепили, а ко второму приложили постоянную силу  $F$ . В результате измерений, получено, что удлинение трубки  $\Delta l$  связано с величиной приложенной силы  $F$  законом Гука  $F = k\Delta l$ .

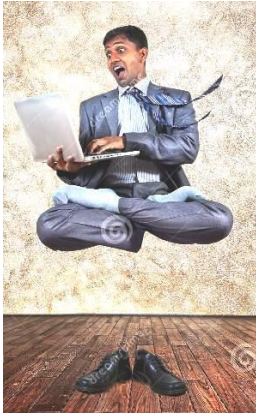


1.1 Выразите значение коэффициента жесткости трубки  $k$  через ее размеры  $L, R_0$  и микропараметры модели  $a, \gamma$ .

### Часть 2. Разбухание трубки.

Торцы описанной трубки закрывают, а трубку начинают накачивать воздухом. При не растянутой резине давление воздуха внутри трубки равно атмосферному давлению  $P_0$ . Далее считайте, что резиновая пленка трубки и воздух внутри нее находятся в состоянии равновесия. Продольным удлинением трубки в данных условиях можно пренебречь, т.е. считать, что трубка только «разбухает» - увеличивается ее радиус.

2.1 Найдите зависимость давления воздуха в трубке от ее радиуса. Постройте схематический график этой зависимости.  
2.2 Определите, при каком максимальном давлении трубка может находиться в состоянии равновесия.



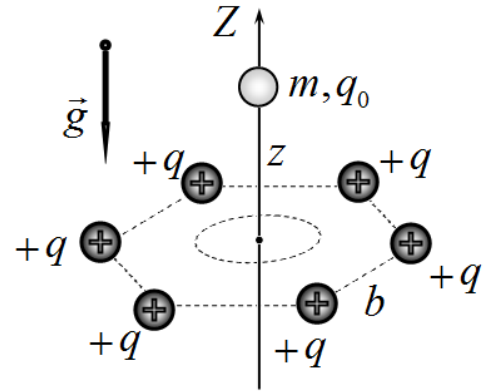
### Задача 3. Электростатическая левитация.

**Левитация** - неподвижное зависание объекта в воздухе без какой-либо механической опоры или подвеса.

Чтобы «подвесить» небольшой шарик создана следующая установка.

На горизонтальной непроводящей плоскости закреплены шесть небольших шариков, электрический каждого равен  $+q$ . Эти шарики находятся в вершинах правильного шестиугольника со стороной  $b$ . Через центр шестиугольника

проходит тонкий непроводящий стержень, по которому может скользить без трения небольшой шарик массы  $m$ , имеющий электрический заряд  $q_0$ . В горизонтальной плоскости проделано отверстие, позволяющее шарикам находиться как выше, так и ниже плоскости.



Совместим вертикальную ось  $Z$  со стержнем, начало отсчета которой находится в плоскости с заряженными шариками.

#### Часть 1. Напряженность поля, создаваемого зарядами на плоскости.

Обозначим  $E_z$  проекцию вектора напряженности электрического поля, создаваемого шестью зарядами на плоскости, на ось  $Z$ .

1.1. Найдите зависимость величины  $E_z(z)$  на стержне от координаты  $z$ .

1.2. Представьте полученную зависимость  $E_z(z)$  в виде

$$E_z(\xi) = E_0 f(\xi), \quad (1)$$

где  $E_0$  - постоянная величина, зависящая от заряда шариков  $q$  и длины стороны шестиугольника  $b$ ;  $f(\xi)$  - безразмерная функция, зависящая только от величины  $\xi = \frac{z}{b}$  (отношения координаты  $z$  к расстоянию  $b$ ).

1.3. Получите приближенные выражения для функции  $E_z(\xi)$  в двух предельных случаях:  $E_{(0)}(\xi)$  при  $\xi \ll 1$  (т.е. при  $z \ll b$ );  $E_{(\infty)}(\xi)$  при  $\xi \gg 1$  (т.е. при  $z \gg b$ ).

1.4. Нарисуйте схематические графики функции  $E_z(z)$  и ее приближений.

#### Часть 2. Зависание.

В этой части Вам необходимо найти возможные положения «зависания» шарика на стержне.

Масса и заряд подвижного шарика на стержне подобраны таким образом, что

$$\frac{m_0 g}{|q_0 E_0|} = \eta = 0,050, \text{ где } E_0 - \text{постоянная в формуле (1), } g - \text{ускорение свободного падения.}$$

2.1 Рассчитайте, на каком расстоянии от плоскости  $z$  (рассчитайте соответствующие численные значения параметра  $\xi = \frac{z}{b}$ ) может «зависать» шарик на стержне, если

а) заряд подвижного шарика положительный; б) заряд подвижного шарика отрицательный.



#### Задача 4. «Антирадуга».

Преломление света в капельках воды, находящихся в воздухе, приводит к такому эффектному природному зрелищу как радуга.

А как будет проходить свет через капельку воздуха, находящуюся в воде? Оказывается, что в этом случае на таких «антикаплях» могут появляться яркие световые блики.

В данной задаче Вам необходимо рассмотреть прохождение света через воздушный пузырек сферической формы, находящийся в воде.

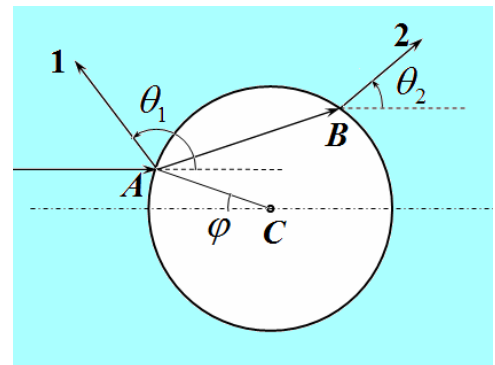
Показатель преломления воды равен  $n = 1,33$ .

##### Часть 1. Полное освещение.

Сферический пузырек полностью освещается параллельным пучком света. Рассмотрим некоторый луч, падающий на пузырек в точке  $A$ . Положение этого луча удобно характеризовать углом  $\varphi$ , показанным на рисунке.

При попадании на поверхность пузырька луч частично отражается (луч 1 на рисунке), при этом направление его распространения отклоняется на угол  $\theta_1$  от первоначального направления.

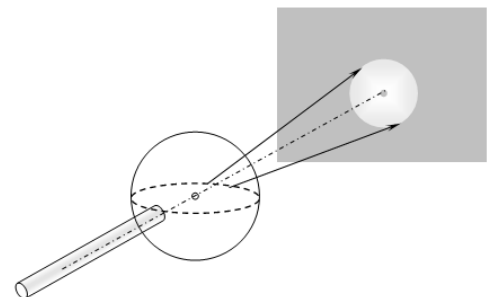
Также падающий луч преломляется на поверхности пузырька, проходит внутри пузырька (отрезок  $AB$ ) и выходит из него, образуя луч 2. Обозначим угол отклонения этого луча  $\theta_2$ .



- 1.1 Найдите зависимости углов отклонения лучей  $\theta_1$  и  $\theta_2$  от угла падения  $\varphi$ .
- 1.2 Укажите, в каких пределах изменяются эти углы (приведите их численные значения).
- 1.3 Укажите диапазон изменения угла  $\theta_1$ , в котором интенсивность отраженного принимает максимальное значение.

##### Часть 2. Узкий пучок.

На пузырек радиуса  $R = 10 \text{ мм}$  падает узкий цилиндрический пучок света. Ось падающего пучка света проходит через центр пузырька, радиус пучка света  $r = 1,0 \text{ мм}$ . На расстоянии  $l = 5,0 \text{ см}$  от задней стороны пузырька перпендикулярно падающему свету расположен экран, на котором наблюдается круглое светлое пятно. Экран, так же как и пузырек находится в воде.



- 2.1 Рассчитайте радиус светлого пятна на экране.

## Вариант 2.

## Задача 1. Гонка преследования.

1. Для построения графика зависимости скорости от времени можно рассчитать длительности прохождения каждого участка с постоянной скоростью по очевидной формуле

$$\Delta t_k = \frac{\Delta S_k}{v_k}. \quad (1)$$

а затем рассчитать времена окончания прохождения участков по формуле

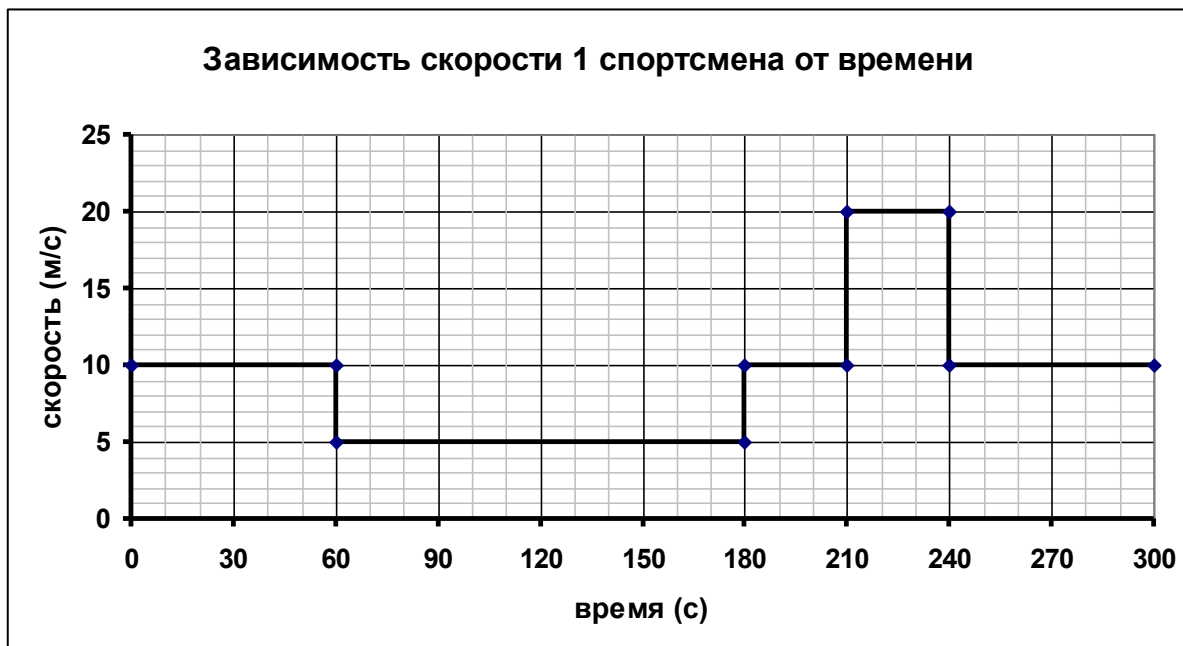
$$t_0 = 0, \quad t_k = t_{k-1} + \Delta t_k \quad (2)$$

Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1.

| $x, м$ | $v, м/с$ | $t, с$ |
|--------|----------|--------|
| 0      | 0        | 0      |
| 600    | 10       | 60     |
| 1200   | 5        | 180    |
| 1500   | 10       | 210    |
| 2100   | 20       | 240    |
| 2700   | 10       | 300    |

График этой зависимости показан на рисунке.

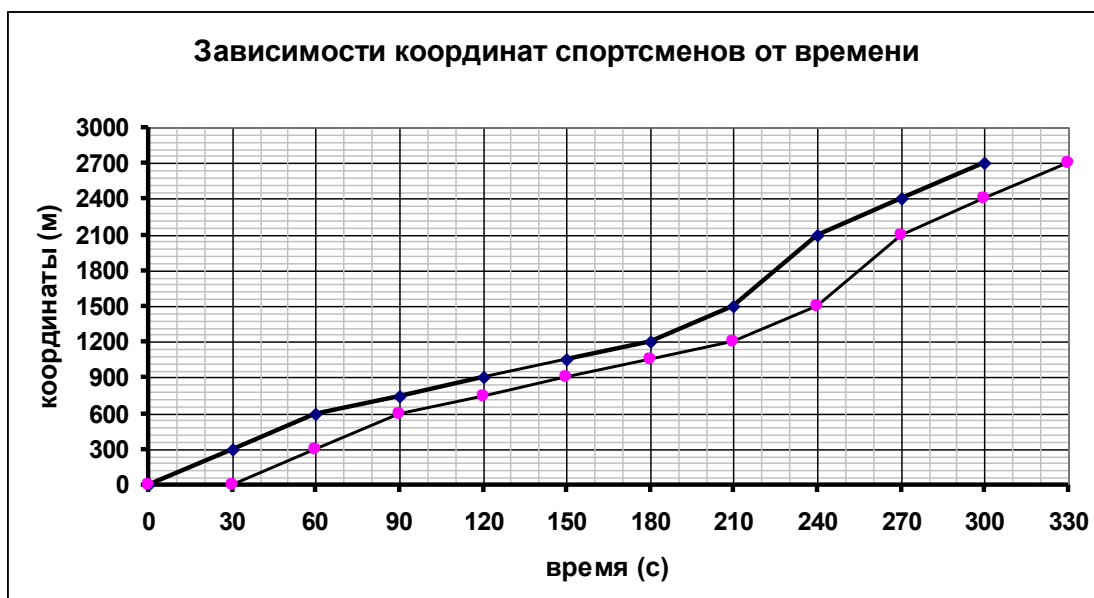


2-3. Все рассчитанные времена кратны 30 с, время между стартами спортсменов также равно 30 с. Поэтому имеет смысл дополнить таблицу 1 значениями скоростей и координат первого спортсмена через каждые 30 с. Значения координат в промежуточных точках, не вошедших в Таблицу 1, рассчитываются элементарно по закону равномерного движения. Для второго спортсмена значения скоростей и координат необходимо сместить на 1 строчку вниз (т.е. на 30 с). Наконец, по найденным значениям координат обоих спортсменов рассчитывается расстояние между ними  $\Delta x$ . Результаты этих расчетов приведены в таблице 2.

Таблица 2.

| $t, c$ | $v_1, м/с$ | $v_2, м/с$ | $x_1, м$ | $x_2, м$ | $\Delta x, м$ |
|--------|------------|------------|----------|----------|---------------|
| 0      | 0          | 0          | 0        | 0        | 0             |
| 30     | 10         | 0          | 300      | 0        | 300           |
| 60     | 10         | 10         | 600      | 300      | 300           |
| 90     | 5          | 10         | 750      | 600      | 150           |
| 120    | 5          | 5          | 900      | 750      | 150           |
| 150    | 5          | 5          | 1050     | 900      | 150           |
| 180    | 5          | 5          | 1200     | 1050     | 150           |
| 210    | 10         | 5          | 1500     | 1200     | 300           |
| 240    | 20         | 10         | 2100     | 1500     | 600           |
| 270    | 10         | 20         | 2400     | 2100     | 300           |
| 300    | 10         | 10         | 2700     | 2400     | 300           |
| 330    |            | 10         |          | 2700     |               |

Графики зависимостей координат спортсменов от времени и расстояния между ними от времени приведены на рисунках ниже.



4. Максимальное расстояние между спортсменами 600 м было в момент времени  $t = 240 c$ . В этот момент первый спортсмен находился на расстоянии 2100 м, второй на расстоянии 1500 м от точки старта.

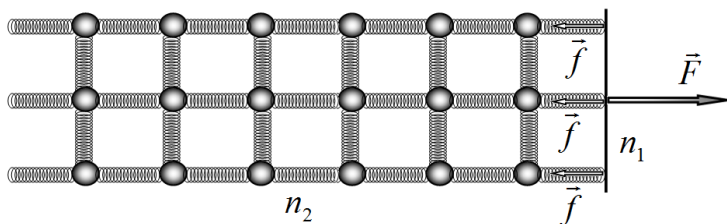


## Задача 2. Резиновая трубка.

### Часть 1. Растяжение трубки.

1.1 Мысленно сделаем развертку цилиндрической поверхности трубки (см. рис.).

Рассматриваемая трубка имеет



$$n_1 = \frac{2\pi R_0}{a} \quad (1)$$

пружинок по окружности трубки и

$$n_2 = \frac{L}{a} \quad (2)$$

по ее длине.

Если к трубке приложить постоянную силу  $\vec{F}$ , то она будет уравновешена силами упругости  $n_1$  пружинок:

$$F = n_1 f = \frac{2\pi R_0}{a} \gamma x, \quad (3)$$

Где  $f = \gamma x$  - сила упругости одной пружинок,  $x$  - ее удлинение. Силы упругости всех «продольных» пружинок будут одинаковы, т.к. они соединены последовательно, поэтому и их удлинения также будут одинаковы. Общее удлинение трубки равно

$$\Delta l = n_2 x = \frac{L}{a} x. \quad (4)$$

Выразим из последнего выражения  $x = \frac{a}{L} \Delta l$  и подставим в формулу (3):

$$F = \frac{2\pi R_0}{a} \gamma x = \frac{2\pi R_0}{a} \gamma \cdot \frac{a}{L} \Delta l = \frac{2\pi R_0}{L} \gamma \cdot \Delta l, \quad (5)$$

Из этого выражения следует, что коэффициент жесткости полоски равен

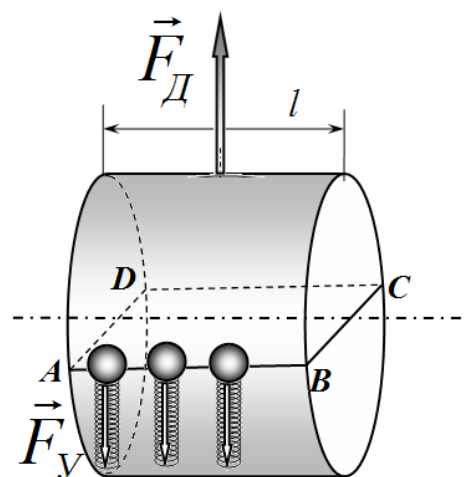
$$k = \gamma \frac{2\pi R_0}{l}. \quad (6)$$

### Часть 2. Разбухание трубки.

2.1 Для расчета зависимости давления внутри трубки от ее радиуса рассмотрим условия равновесия верхней половины цилиндрической оболочки некоторой произвольной длины  $l$ . Силу давления газа уравнивают силы упругости пружинок, расположенные вдоль линий  $AB$  и  $DC$  воображаемого сечения трубки. Число этих пружинок равно

$$n = \frac{2l}{a} \quad (7)$$

Растяжение оболочки трубки является изотропным, поэтому растяжения всех пружинок оболочки одинаковы. Удлинение каждой пружинок можно выразить через радиусы трубки в растянутом и не деформированном состояниях:



$$n(a+x) = 2\pi R \Rightarrow \frac{2\pi R_0}{a}(a+x) = 2\pi R \Rightarrow x = a\left(\frac{R}{R_0} - 1\right). \quad (8)$$

Тогда суммарная силы упругости, действующая на половину трубки равна

$$F_y = n\gamma x = \frac{2l}{a}\gamma \cdot a\left(\frac{R}{R_0} - 1\right) = \frac{2l}{R_0}\gamma(R - R_0). \quad (9)$$

Суммарная сила давления газа  $\vec{F}_d$  на верхнюю половину оболочки направлена вертикально (на рисунке). Для расчета этой силы можно рассмотреть силы давления, действующие на малые площадки трубки и просуммировать их (учитывая, что надо искать векторную сумму). Можно поступить и более простым способом. Мысленно «закроем» половину трубки прямоугольником  $ABCD$ . Такая «полутрубка» при любом давлении внутри трубки будет находиться в состоянии равновесия, поэтому сила давления на цилиндрическую поверхность будет по модулю равна силе давления на плоское сечение  $ABCD$ . А эта последняя сила вычисляется элементарно

$$F_d = \Delta P \cdot 2Rl \quad (10)$$

Здесь

$$\Delta P = P - P_0 \quad (11)$$

Разность давлений воздуха внутри трубки и вне ее.

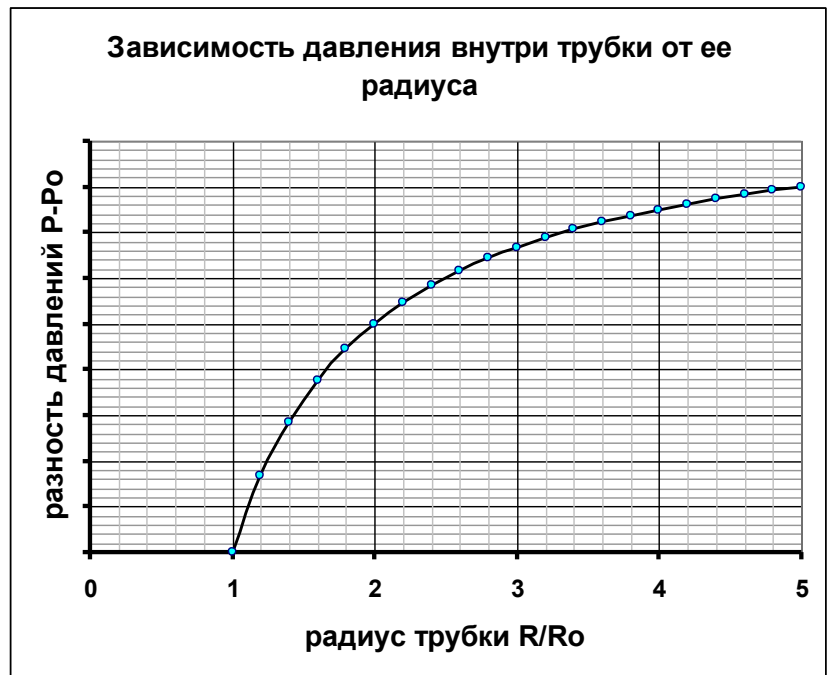
Приравнивая силу давления и силу упругости,

$$\frac{2l}{R_0}\gamma(R - R_0) = 2Rl\Delta P \quad (12)$$

получим искомое соотношение между давлением воздуха внутри трубки и ее радиусом:

$$\Delta P = \gamma \frac{R - R_0}{RR_0} \Rightarrow P = P_0 + \gamma\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right) \quad (13)$$

Схематический график этой зависимости показан на рисунке.



2.2 Полученная зависимость монотонно возрастает и стремится к предельному значению при

$$R \rightarrow \infty \quad (14)$$

Тогда максимальное значение давления внутри трубки равно

$$P_{\max} = P_0 + \frac{\gamma}{R_0}. \quad (15)$$

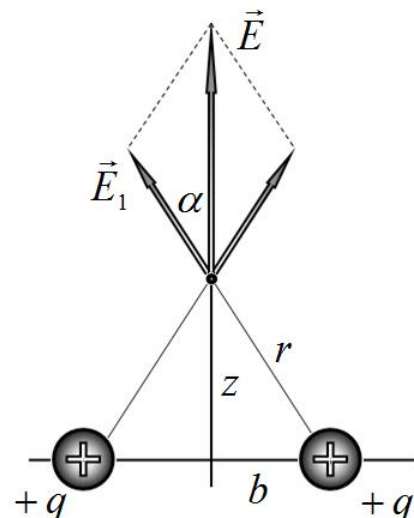


### Задача 3. Электростатическая левитация.

#### Часть 1. Напряженность поля, создаваемого зарядами на плоскости.

1.1 Из симметрии задачи следует, что вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  на стержне будет направлен вертикально. Поэтому запишем выражение для вертикальной проекции вектора напряженности  $\vec{E}_1$  поля, создаваемого одним заряженным шариком:

$$\begin{aligned}
 E_{1z} &= E_1 \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{z}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(b^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} \frac{\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$



Здесь учтено, что в правильном шестиугольнике расстояния от центров шариков до центра шестиугольника равны длине стороны шестиугольника.

Так поле создается шестью шариками, то проекция вектора напряженности сумарного поля будет равна

$$E_z = 6E_{1z} = \frac{3q}{2\pi\epsilon_0 b^2} \frac{\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}.
 \tag{2}$$

1.2 Таким образом постоянная в формуле (1) равна

$$E_0 = \frac{3q}{2\pi\epsilon_0 b^2}.
 \tag{3}$$

А функция, входящая в это выражение

$$f(\xi) = \frac{\xi}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}.
 \tag{4}$$

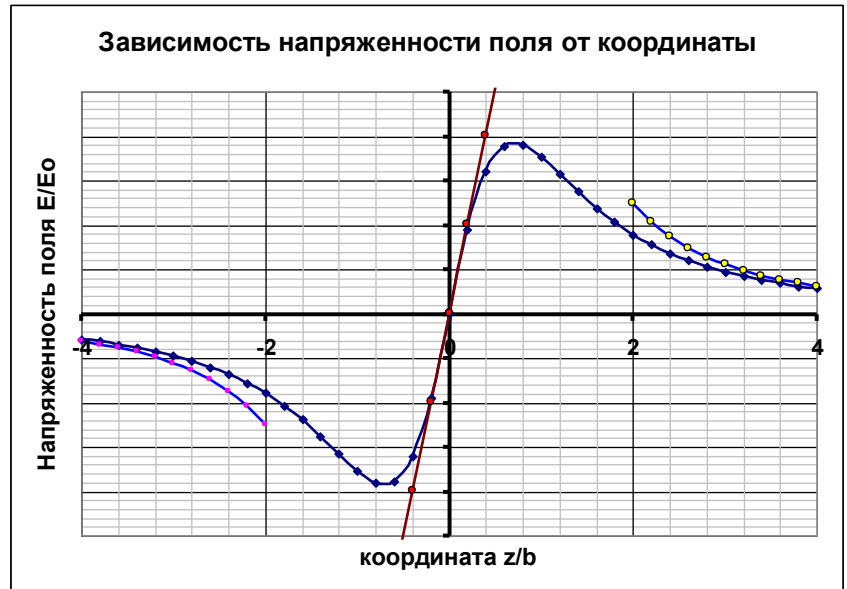
1.3 При малых значениях  $\xi \ll 1$  можно пренебречь величиной  $\xi^2$  в знаменателе, в этом случае приближенное выражение для напряженности поля имеет вид

$$E = E_0 \xi.
 \tag{5}$$

При больших значениях  $\xi \gg 1$  в знаменателе можно пренебречь единицей, тогда напряженность поля приближенно описывается формулой

$$E = \frac{E_0}{\xi^2}.
 \tag{6}$$

1.4 Схематический график искомой зависимости показан на рисунке. На этом же рисунке показаны графики приближенных функций, описывающих данную зависимость в предельных случаях.



## Часть 2. Зависание.

2.1 Чтобы шарик мог находиться в состоянии равновесия на стержне, необходимо выполнения условия равенства сил

$$mg = q_0 E_0 f(\xi). \quad (7)$$

Из этого условия следует уравнение для определения возможных положений равновесия

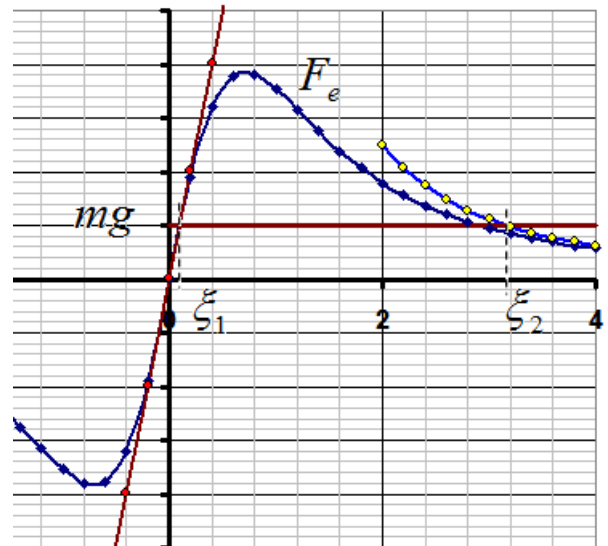
$$f(\xi) = \frac{mg}{q_0 E_0} = \eta. \quad (8)$$

Или в явном виде

$$\frac{\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} = \eta. \quad (9)$$

Решить это уравнение в явном виде затруднительно, поэтому проведем сначала графический анализ возможных решений.

Сначала рассмотрим случай, когда заряд подвижного шарика положительный. На рисунке показан примерный график зависимости электрической силы  $F_e$  от расстояния, на который нанесена горизонтальная прямая, отмечающая значение силы тяжести подвижного шарика. Как следует из этого рисунка существует два корня уравнения (9). Традиционным способом не сложно показать, что меньший корень описывает положение равновесия. Большему корню соответствует положение устойчивого равновесия. Тем самым шарик сможет «зависнуть» именно в этом положении.



Теперь можно воспользоваться тем, что заданный параметр  $\eta$  мал. Поэтому можно воспользоваться приближением (6), для функции, описывающей электрическую силу. В этом случае уравнение (9) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\xi^2} = \eta. \quad (10)$$

Из которого находим

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{\eta}} \approx 4,5. \quad (11)$$

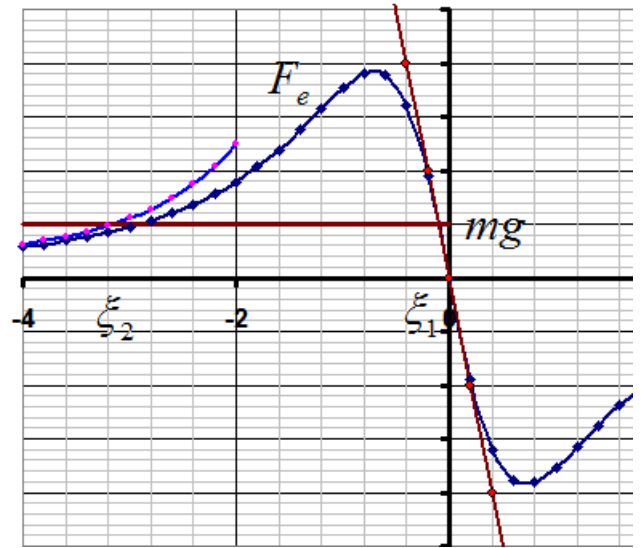
При отрицательном заряде шарика уравнение (9) имеет вид

$$-\frac{\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \eta. \quad (12)$$

Графическая иллюстрация этого уравнения показана на рисунке. Анализ устойчивости в этом случае показывает, что устойчивым положением равновесия является меньший по модулю корень. В этой области можно воспользоваться приближением (5).

Следовательно, при отрицательном заряде шарика он может «зависнуть» в точке с координатой

$$\xi = -\eta = -0,050. \quad (13)$$



#### Задача 4. «Антирадуга».

##### Часть 1. Полное освещение

1.1 На рисунке показан ход луча через воздушный пузырек. Угол падения (угол между падающим лучом и нормалью к поверхности) равен  $\varphi$ . В соответствии с законом отражения света угол отражения также равен  $\varphi$ . Тогда, как следует из рисунка, при отражении луч отклоняется на угол

$$\theta_1 = \pi - 2\varphi. \quad (1)$$

Обозначим угол преломления (угол между нормалью и преломленным лучом)  $\alpha$ . По закону преломления света этот угол удовлетворяет уравнению

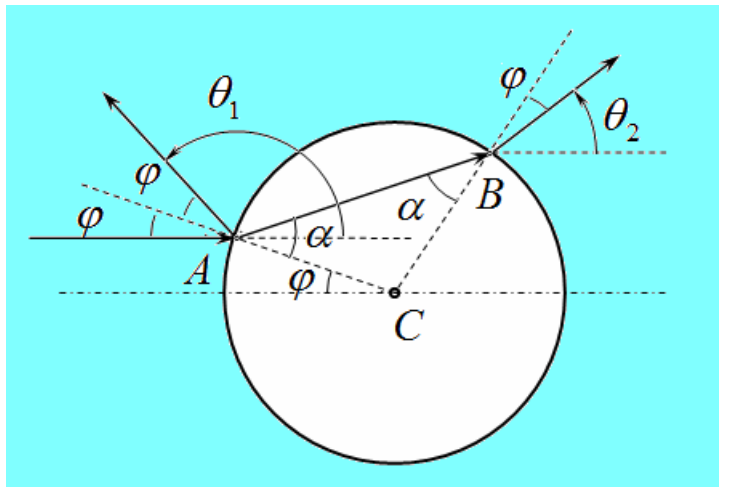
$$n \sin \varphi = \sin \alpha. \quad (2)$$

Откуда следует, что

$$\alpha = \arcsin(n \sin \varphi) \quad (3)$$

Угол преломления при выходе из пузырька равен  $\varphi$ , поэтому угол отклонения луча после прохождения через пузырек равен

$$\theta_2 = \pi - (\pi - 2\alpha) - \varphi - \varphi = 2(\alpha - \varphi) = 2(\arcsin(n \sin \varphi) - \varphi). \quad (4)$$



1.2 Следует отметить, что при падении луча света на пузырек возможно полное отражение от поверхности пузырька. В предельном случае угол преломления равен  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . При этом угол падения равен

$$\varphi^* = \arcsin \frac{1}{n} = 0,85 \approx 49^\circ \quad (5)$$

Заметим, что в этом предельном случае луч отраженный 1 и луч 2, «прошедший» через каплю совпадают.

Отражение света происходит при любом угле падения, поэтому при изменении угла падения от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  угол  $\theta_1$  изменяется от  $180^\circ$  до  $0^\circ$ :

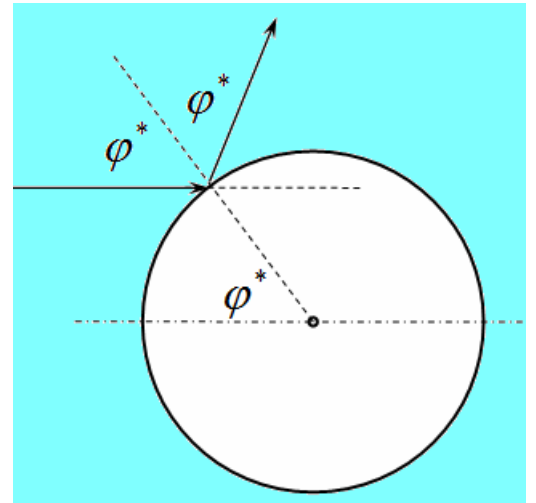
$$\theta_1 \in [180^\circ, 0^\circ]. \quad (6)$$

Луч проходит через пузырек, только при угле падения меньшем предельного угла  $\varphi \leq \varphi^*$ . При этом угол отклонения этого луча изменяется от  $0^\circ$  до предельного значения

$$\theta_{2\max} = \pi - 2\varphi^* = 1,44 \approx 82,5^\circ. \quad (7)$$

Таким образом,

$$\theta_2 \in [0^\circ, 82,5^\circ]. \quad (8)$$



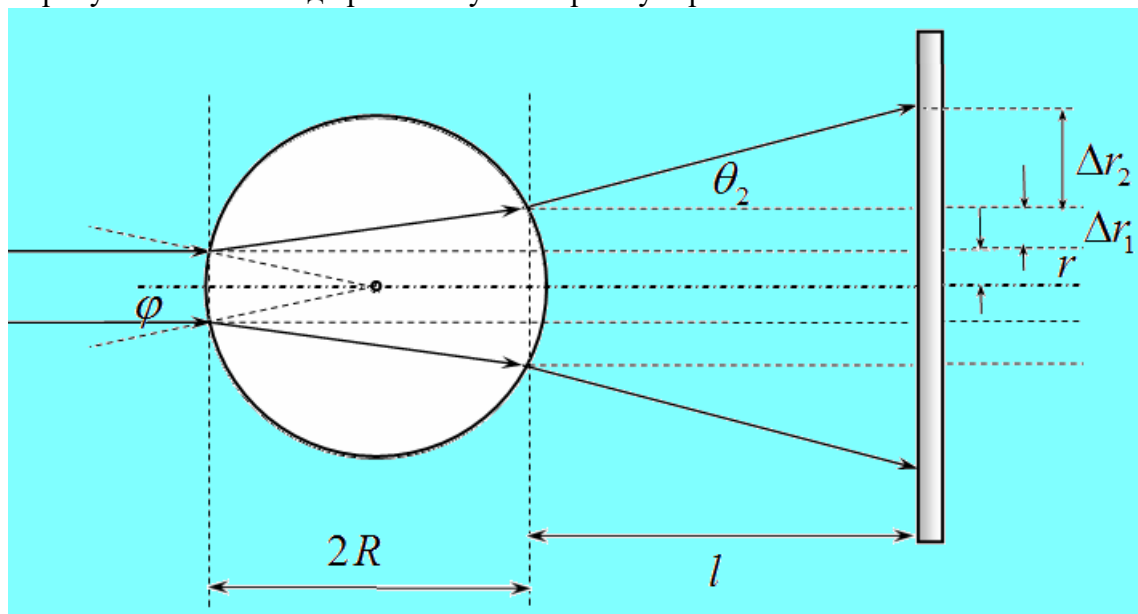
1.3 Интенсивность отраженного света будет максимальной при полном отражении, т.е. при  $\varphi \geq \varphi^*$ . В этом случае угол отклонения этого луча изменяется в пределах

$$\theta_1 \in [82,5^\circ, 0^\circ]. \quad (9)$$

Заметим, что именно в этом диапазоне можно наблюдать яркие сверкающие блики на поверхности пузырьков.

## Часть 2. Узкий пучок.

2.1. На рисунке показан ход крайних лучей через пузырек.



Так радиус пучка мал по сравнению с радиусом пузырька  $r \ll R$ , все углы можно считать малыми и использовать известные приближенные формулы для тригонометрических функций (углы измеряются в радианах):

$$\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \beta; \quad \cos \beta \approx 1.$$

Тогда:

Угол падения:

$$\varphi \approx \frac{r}{R}; \quad (10)$$

Угол преломления:

$$\alpha \approx n\varphi = n \frac{r}{R}; \quad (11)$$

Смещение луча внутри пузырька:

$$\Delta r_1 \approx 2R(\alpha - \varphi) = 2R(n - 1) \frac{r}{R} = 2r(n - 1); \quad (12)$$

Угол отклонения луча

$$\theta_2 = 2(\alpha - \varphi) = 2(\operatorname{arcsin}(n \sin \varphi) - \varphi) \approx 2(n - 1) \frac{r}{R}; \quad (13)$$

Смещение луча на пути от пузырька до экрана:

$$\Delta r_2 \approx l\theta_2 \approx 2l(n - 1) \frac{r}{R}. \quad (14)$$

Окончательно получаем, что радиус пятна на экране равен:

$$r_1 = r + \Delta r_1 + \Delta r_2 = r + 2r(n - 1) + l(n - 1) \frac{r}{R} = r \left( 2n + 1 + 2(n - 1) \frac{l}{R} \right) \approx 7,0 \text{ мм}. \quad (15)$$